

BAKİ UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS
OF BAKU UNIVERSITY

FİZİKA-RİYAZİYYAT ELMLƏRİ
seriyası

серия
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 4
2019

RİYAZİYYAT

УДК 517.977.57

**ОБ ОДНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ
ТИПА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ****Р.К.ТАГИЕВ, Ш.И.МАГЕРРАМЛИ***Бакинский Государственный Университет*
r.tagiyev@list.ru, semedli.shehla@gmail.com

Рассматривается обратная задача типа управления об определении старшего коэффициента одномерного параболического уравнения с интегральным граничным условием. Доказана существование решение задачи, получена формула для градиента целевого функционала и установлено необходимое условие оптимальности.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение, интегральное граничное условие

Коэффициентные обратные задачи для уравнений с частными производными могут быть поставлены как задачи оптимального управления соответствующими системами. В таких постановках коэффициентных обратных задач искомые коэффициенты рассматриваемых уравнений играют роль управления и целевые функционалы составляются на основе заданных дополнительных условий. Коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений с классическими краевыми условиями изучены в работах [1-4] и др. Однако такие постановки обратных задач для параболических уравнений с интегральными условиями исследованы существенно слабее [5,6].

В данной работе изучается обратная задача типа управления об определении старшего коэффициента параболического уравнения с интегральным граничным и дополнительным суммарным условием. Доказана существование решение задачи, найдена формула для градиента целевого функционала и установлено необходимое условие оптимальности управления.

1. Постановка обратной задачи типа управления

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(v) = \int_0^l \left| \sum_{i=1}^N \alpha_i u(x, t_i; v) - \chi(x) \right|^2 dx \quad (1)$$

на множестве

$$V = \left\{ v = v(x) \in W_2^1(0, l) : 0 < v \leq v(x) \leq \mu, |v'(x)| \leq d \text{ п.в.на } (0, l) \right\} \quad (2)$$

при условиях

$$u_t - (v(x)u_x)_x + a(x, t)u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

$$u(0, t) = 0, \quad v(l)u_x(l, t) = \int_0^l H(x, t)u(x, t)dx, \quad 0 < t \leq T. \quad (5)$$

Здесь $N \geq 1, \alpha_i > 0 (i = \overline{1, N}), l, T, v, \mu, d > 0, t_i > 0 (i = \overline{1, N}), 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ - заданные числа, $v = v(x)$ -управление, $u = u(x, t) = u(x, t; v)$ -решение краевой задачи (3)-(5), соответствующее управлению $v \in V$, $a(x, t), f(x, t), H(x, t), \chi(x), \varphi(x)$ - известные функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} |a(x, t)| \leq \mu, \quad |H(x, t)| \leq \mu_1, |H_t(x, t)| \leq \mu_2 \text{ п.в.на } Q; \\ f \in L_2(Q), \varphi \in W_{2,0}^1(0, l), \chi \in L_2(0, l), \mu_1, \mu_2 = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Используемые в работе обозначения функциональных пространств и их норм соответствует [7, с. 21 – 26]. Ниже положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений, обозначаются через $M_j, j = 1, 2, \dots$.

Принадлежащую пространству $V_{2,0}^{1,0}(Q) = \{u : u \in V_2^{1,0}(Q), u(0, t) = 0\}$ функцию $u = u(x, t) = u(x, t; v)$ назовем обобщенным решением краевой задачи (3)-(5) из $V_{2,0}^{1,0}(Q)$, соответствующую управлению $v \in V$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \iint_Q [-u\eta_t + v(x)u_x\eta_x + a(x, t)u\eta] dxdt - \int_0^T \left[\int_0^l H(x, t)u(x, t)dx \right] \eta(l, t)dt = \\ = \int_0^l \varphi(x)\eta(x, 0)dx + \iint_Q f(x, t)\eta dxdt, \end{aligned} \quad (7)$$

для всех $\eta = \eta(x, t) \in \hat{W}_{2,0}^1(Q) = \{\eta : \eta \in W_2^1(Q), \eta(0, t) = 0, \eta(x, T) = 0\}$.

Используя метод Галеркина и результаты монографии [7, с.202-210] можно показать, что при каждом заданном $v \in V$ существует единственное обобщенное решение $u = u(x, t)$ из $V_{2,0}^{1,0}(Q)$ краевой задачи (3)-(5), это решение принадлежит также пространству $W_{2,0}^1(Q)$ и верна оценка

$$\|u\|_{2,Q}^{(1)} \leq M_1 \|\varphi\|_{2,(0,l)}^{(1)} + \|f\|_{2,Q}. \quad (8)$$

Задача (1)-(5) тесно связана с обратной задачей, заключающейся об определении функций $\{u(x,t), v(x)\}$, удовлетворяющих условиям (2)-(5) и дополнительному суммарному условию

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i u(x, t_i) = \chi(x), \quad 0 < x < l. \quad (9)$$

Если в задаче (1)-(5) окажется, что существует управление $v_* \in V_*$ доставляющее функционалу (1) нулевое значение, то пара $\{u(x,t; v_*), v_*(x)\}$ будет решением задачи (2)-(5), (9).

2. Существование решение задачи

Теорема 1. Пусть выполнены условия (6). Тогда задача (1)-(5) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Возьмем некоторый элемент $v \in V$ и произвольную последовательность $\{v_k\} \subset V$ такую, что

$$v_k \rightarrow v \text{ слабо в } W_2^1(0, l). \quad (10)$$

Из (10) следует [7, с.78], что

$$v_k \rightarrow v \text{ сильно в } C[0, l]. \quad (11)$$

Положим $u_k = u_k(x, t) = u(x, t; v_k)$ и из (3)-(5), записанных при $u = u_k, v = v_k$, учитывая оценку (8), получим

$$\|u_k\|_{2,Q}^{(1)} \leq M_2 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Тогда в силу теоремы вложения [7, с.78], не ограничивая общности, может считать, что

$$u_k(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ слабо в } W_2^1(Q) \text{ и} \\ \text{сильно в } L_2(Q), \quad (13)$$

$$u_k(x, t_i) \rightarrow u(x, t_i) \quad (i = \overline{1, N}) \text{ сильно в } L_2(0, l), \quad (14)$$

где $u = u(x, t) \in W_{2,0}^1(Q)$ -некоторый элемент.

Для функций $u_k = u_k(x, t)$ справедливы тождества

$$\int_Q [-u_k \eta_t + v_k(x) u_{kx} \eta_x + a(x, t) u_k \eta] dx dt - \int_0^T \int_0^l H(x, t) u_k(x, t) dx dt \Big] \eta(l, t) dt = \\ = \int_0^l \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \int_Q f(x, t) \eta dx dt \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \forall \eta = \eta(x, t) \in \hat{W}_2^1(Q). \quad (15)$$

Проводя обычное преобразование, пользуясь неравенством Коши-Буняковского и соотношения (11)-(13), имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_Q v_k u_{kx} \eta_x dxdt - \int_Q v u_x \eta_x dxdt \right| = \left| \int_Q v(u_{kx} - u_x) \eta_x dxdt + \int_Q u_{kx} (v_k - v) \eta_x dxdt \right| \leq \\ & \leq \left| \int_Q v(u_{kx} - u_x) \eta_x dxdt \right| + \|v_k - v\|_{C[0,l]} \times \|u_k\|_{2,Q} \|\eta\|_{2,Q} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Кроме того, используя неравенство Коши-Буняковского, ограниченность вложения $W_2^1(Q) \rightarrow L_2(0, T)$ и соотношение (13) получим

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \left[\int_0^l H(x, t) u_k(x, t) dx \right] \eta(l, t) dt - \int_0^T \left[\int_0^l H(x, t) u(x, t) dx \right] \eta(l, t) dt \right| \leq \\ & \leq \mu_1 \|u_k - u\|_{2,Q} \|\eta(l, t)\|_{2,Q} \leq \mu_1 \sqrt{l} M_3 \|u_k - u\|_{2,Q} \|\eta\|_{2,Q}^{(1)} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в равенстве (15) и учитывая соотношения (13), (16), (17) получим, что функция $u = u(x, t)$ удовлетворяет тождеству (7), т.е. $u(x, t) = u(x, t; v)$. Таким образом, соотношения (13), (14) справедливы с функцией $u(x, t) = u(x, t; v)$ и в частности

$$u(x, t_i; v_k) \rightarrow u(x, t_i; v) \quad (i = \overline{1, n}) \text{ сильно в } L_2(0, l). \quad (18)$$

Тогда из равенства (1) и соотношение (18) следует, что $J(v_k) \rightarrow J(v)$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, функционал $J(v)$ слабо непрерывен на слабо компактном множестве V . Потому из [8, с.49] следует, что функционал $J(v)$ достигает своей нижней грани на V . Теорема 1 доказана.

3. Градиент целевого функционала и условие оптимальности

Введем сопряженную краевую задачу для задачи (1)-(5)

$$\psi_t + (v(x)\psi_x)_x - a(x, t)\psi + H(x, t)\psi(l, t) = 0, \quad (x, t) \in Q = \{(x, t): 0 < x < l, 0 \leq t < T\}, \quad (19)$$

$$[\psi]_{t=t_k} \equiv \psi(x, t_k + 0) - \psi(x, t_k - 0) = 2\alpha_k \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i u(x, t_i) - \chi(x) \right], \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$\psi(x, T) = -2\alpha_N \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i u(x, t_i) - \chi(x) \right], \quad 0 \leq x \leq l, \quad (20)$$

$$\psi(0, t) = 0, \quad \psi_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq t < T. \quad (21)$$

Под решением краевой задачи (19)-(21), при фиксированном $v \in V$, понимаем обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q)$. Это решение принадлежит пространству $V_{2,0}^{1,0}(Q)$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q [\psi \eta_t + v(x)\psi_x \eta_x + a(x, t)\psi \eta - H(x, t)\psi(l, t)\eta] dxdt =$$

$$= -\sum_{k=1}^N 2\alpha_k \int_0^l \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i u(x, t_i) - \chi(x) \right] \eta(x, t_k) dx,$$

$$\forall \eta = \eta(x, t) \in \tilde{W}_{2,0}^1(Q) = \left\{ \eta : \eta \in W_2^1(Q), \eta(0, t) = 0, \eta(x, 0) = 0 \right\}. \quad (22)$$

Применяя метод Галеркина и используя результаты из [7, с. 202-212] можно показать, что при каждом заданном $v \in V$ краевая задача (19)-(21) однозначно разрешима в пространстве $V_{2,0}^{1,0}(Q)$ и верна оценка

$$\|\psi\|_Q \equiv \|\psi\|_{V_{2,0}^{1,0}(Q)} \leq M_4 \left\| \sum_{k=1}^N 2\alpha_k \int_0^l \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i u(x, t_i) - \chi(x) \right] dx \right\|_{2,(0,l)}.$$

Оценивая правую часть этого неравенства и учитывая (8), получаем оценку

$$\|\psi\|_Q \leq M_5 \left[\alpha \left(\|\varphi\|_{2,(0,l)}^{(1)} + \|f\|_{2,Q} \right) + \|\chi\|_{2,(0,l)} \right], \quad (23)$$

где $\alpha = \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k^2 \right)^{1/2}$.

Пусть функция $\theta = \theta(x; v) \in W_2^1(0, l)$ является обобщенным решением из $W_2^1(0, l)$ следующей вспомогательной краевой задачи:

$$-\theta'' + \theta = \int_0^T u_x(x, t; v) \psi_x(x, t; v) dt, \quad 0 < x < l, \quad (24)$$

$$\theta'(0) = \theta'(l) = 0. \quad (25)$$

Обобщенное решение краевой задачи (24), (25) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^l (\theta' \eta' + \theta \eta) dx = \int_0^l \left(\int_0^T u_x(x, t; v) \psi_x(x, t; v) dt \right) \eta dx, \quad \forall \eta = \eta(x) \in W_2^1(0, l). \quad (26)$$

Нетрудно проверить, что для задачи (24), (25) выполняются все условия теоремы 4 из [9, с. 39] и поэтому эта задача имеет единственное решение из $W_2^1(0, l)$ при каждом фиксированном $v \in V$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (6). Тогда функционал (1) непрерывно дифференцируем по Фреше на множестве V и его градиент имеет вид

$$J'(v) = \theta(x; v), \quad 0 < x < l. \quad (27)$$

Доказательство. Пусть $v \in V$ - некоторый элемент и $\Delta v \in W_2^1(0, l)$ -приращение этого элемента такое, что $v + \Delta v \in V$. Положим $\Delta u(x, t) = u(x, t; v + \Delta v) - u(x, t; v)$. Тогда из (3)-(5) следует, что Δu является обобщенным решением из $W_2^1(Q)$ краевой задачи

$$\Delta u_t - ((v + \Delta v)\Delta u_x)_x + a\Delta u = (\Delta v u_x)_x, \quad (x, t) \in Q, \quad (28)$$

$$\Delta u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (29)$$

$$\Delta u(0, t) = 0,$$

$$(v(l) + \Delta v(l))\Delta u_x(l, t) = \int_0^l H(x, t)\Delta u(x, t)dx - \Delta v(l)u_x(l, t), \quad 0 < t \leq T. \quad (30)$$

Обобщенное решение краевой задачи (28)-(30) удовлетворяет тождеству

$$\int_Q [\Delta u_t \eta + (v + \Delta v)\Delta u_x \eta_x + a\Delta u \eta - H\Delta u \eta(l, t)] dx dt = - \int_Q \Delta v u_x \eta_x dx dt, \quad \forall \eta = \eta(x, t) \in \hat{W}_{2,0}^1(Q). \quad (31)$$

и можно показать, что для него верна оценка

$$|\Delta u|_Q \equiv \|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(Q)} \leq M_6 \|\Delta v u_x\|_{2,Q}.$$

Отсюда учитывая ограниченность вложения $W_2^1(0, l) \rightarrow C[0, l]$ и оценки (8), имеем

$$|\Delta u|_Q \leq M_6 \|\Delta v u_x\|_{2,Q} \leq M_6 \|\Delta v\|_{C[0,l]} \|u_x\|_{2,Q} \leq M_7 \|\Delta v\|_{2,(0,l)}^{(1)}. \quad (32)$$

Приращение функционала (1) представим в виде

$$\Delta J(v) = J(v + \Delta v) - J(v) = \sum_{k=1}^N 2\alpha_k \int_0^l \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i u(x, t_i) - \chi(x) \right] \Delta u(x, t_k) dx + \int_0^l \left| \sum_{k=1}^N \alpha_k \Delta u(x, t_k) \right|^2 dx. \quad (33)$$

Если в (22) положим $\eta = \Delta u$, в (31) положим $\eta = \psi$ и вычтем полученные равенства, то придем к равенству

$$\sum_{k=1}^N 2\alpha_k \int_0^l \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i u(x, t_i; v) - \chi(x) \right] \Delta u(x, t_k) dx = \int_Q (u_x + \Delta u_x) \psi_x dx dt.$$

Подставляя это выражение в (33), получим

$$\Delta J(v) = \int_Q u_x \psi_x \Delta v dx dt + R, \quad (34)$$

где

$$R = \int_0^l \left| \sum_{k=1}^N \alpha_k \Delta u(x, t_k) \right|^2 dx + \int_Q \Delta u_x \psi_x \Delta v dx dt. \quad (35)$$

Если в (26) положим $\eta = \Delta v$ и полученное равенство учтем в (34), то имеем

$$\Delta J(v) = \int_0^l (\theta' \Delta v' + \theta \Delta v) dx + R. \quad (36)$$

Используя неравенства Коши-Буняковского для интеграла и суммы, ограниченность вложения $V_2^{1,0}(Q) \rightarrow L_2(0, l)$ и оценки (23), (32), имеем

$$|R| \leq \int_0^l \left| \sum_{k=1}^N \alpha_k \Delta u(x, t_k) \right|^2 dx + \int_Q |\Delta u_x \psi_x \Delta v| dx dt \leq \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 \cdot \int_0^l \sum_{k=1}^N |\Delta u(x, t_k)|^2 dx + \|\Delta v\|_{C[0,l]} \|\Delta u_x\|_{2,Q} \|\psi_x\|_{2,Q} \leq \leq \alpha^2 M_8 |\Delta u|_2^Q + M_9 \left(\|\Delta v\|_{2,(0,l)}^{(1)} \right)^2 \leq M_{10} \left(\|\Delta v\|_{2,(0,l)}^{(1)} \right)^2.$$

Отсюда и из (36) следует, что функционал (1) дифференцируем по Фреше на V и его градиент имеет вид (27). Используя формулы (27) можно показать, что отображение $J' : V \rightarrow W_2^1(0, l)$ непрерывно. Теорема 2 доказана.

Утверждение следующей теоремы следует из теоремы 5 работы [8, с. 28] с использованием формулы (27).

Теорема 3. Пусть выполнены условия (6). Тогда для оптимальности управления $v_* \in V$ в задаче (1)-(5) необходимо выполнение неравенств

$$\int_0^l [\theta'(x; v_*) (v'(x) - v'_*(x)) + \theta(x; v_*) (v(x) - v_*(x))] dx \geq 0, \quad \forall v = v(x) \in V.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Искендеров А.Д. О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики // ДАН СССР, 1984, т. 274, №3, с. 531-533.
2. Алифанов О.А. Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988, 285 с.
3. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское Научное Издательство, 2009, 457 с.
4. Isgenderov A.D., Tagiyev R.K. Variational method solving the problem of identification of the coefficients of quasilinear parabolic problem // The 7th International Conference "Inverse Problems: modelling and simulation" (IMPS-2014), May 26-31, Turkey. pp.31.
5. Тагиев Р.К., Касумов Р.А. Об оптимизационной постановке коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017, №45, с.49-59.
6. Габитов В.М. Коэффициентная обратная задача типа управления для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием // Вестник Бакинского Университета. Сер. физ.-матем. наук. -2017, №2, с.80-91.
7. Ладыженская О.А. Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967, 736 с.
8. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М., 1981, 400с.
9. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Высш. шк., 1987, 296 с.

**BİRÖLÇÜLÜ PARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN İDARƏETMƏ TIPLI
BİR ƏMSAL TƏRS MƏSƏLƏ HAQQINDA**

R.Q.TAĞIYEV, Ş.İ.MƏHƏRRƏMLİ

XÜLASƏ

İnteqral sərhəd şərtli birölçülü parabolik tənliyin baş əmsalının təyini haqqında tərs məsələnin variasional qoyuluşuna baxılır. Məsələnin həllinin varlığı isbat olunmuş, məqsəd funksionalının qradiyenti üçün düstur alınmış və optimallıq üçün zəruri şərt göstərilmişdir.

Açar sözlər: tərs məsələ, parabolik tənlik, inteqral sərhəd şərti

**ON ONE COEFFICIENT INVERSE PROBLEM OF A CONTROL TYPE
FOR A ONE-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION**

R.K.TAGIEV, Sh.I.MAHARRAMLI

SUMMARY

A variational formulation of the inverse problem of determining the leading coefficient of a one-dimensional parabolic equation with an integral boundary condition is considered. The existence of a solution to the problem is proved, a formula for the gradient of the objective functional is obtained, and the necessary optimality condition is established.

Keywords: inverse problem, parabolic equation, integral boundary condition

УДК 514.763

RELAKSASIYA YOLU İLƏ BÖYÜK ÖLÇÜLÜ XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMANIN BİR MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİ

R.H.HƏMİDOV

Bakı Dövlət Universiteti
shekihamidov@gmail.com

İşdə əlavə məhdudiyətli və bu səbəbdən də müəyyən struktura malik şərtlərlə verilən bir sinif böyük ölçülü xətti proqramlaşdırma məsələsinə baxılır. Məsələnin strukturunun verdiyi imkanlardan istifadə edərək onun həllinin relaksasiya sxemi ilə daha sadə yolla həll oluna bilən məsələlərə gətirilməsinin mümkünlüyü göstərilir. İşdə, həmçinin ilkin məsələnin strukturunu saxlayan reduksiya sxemi təklif olunur. Bu məsələnin iqtisadi və texniki məzmunlu bir çox praktiki məsələlərin həllindəki yeri qeyd olunur. Təklif olunan yeni relaksasiya sxeminin misal üzərində icrası nümayiş etdirilir.

Açar sözlər: Xətti proqramlaşdırma, relaksasiya, bazis həll, sadə iterasiya, ikili məsələ

İşdə aşağıdakı kimi təqdim olunan xətti proqramlaşdırma (XP) məsələsinə baxılır:

$$(E - A)x \leq b, \quad x \leq d, \quad x \geq 0, \quad cx \rightarrow \max. \quad (1)$$

Burada A elementləri mənfi olmayan $(n \times n)$ -matrisdir ($A \geq 0$), E -vahid matrisdir, b və d -nin koordinatları müsbətdir ($b, d > 0$). (1)-dəki vektorların ölçüləri və onların sətir və ya sütun vektor olmasını A matrisi birqiymətli olaraq müəyyən edir.

$c \geq 0$ olduqda (1) məsələsi və onun həlli yolları ətraflı öyrənilmişdir [1]. Bu həll yollarından biri xətti tənliklər sistemi üçün mövcud sadə iterasiyadan çox da fərqlənməyən həll yoludur [1,2]. n böyük olduqda bu üsul daha səmərəlidir.

Bir riyazi model kimi iqtisadi və texniki məsələlərin təhlilində (1) məsələsindən istifadə olunma yolları [1]-də daha ətraflı öyrənilmişdir. Leontiyev modelinin tətbiqi ilə qarşıya çıxan və statik rejimdə neft çıxarmada rast gəlinən bir çox qərar qəbuletmə məsələləri buna misal ola bilər [1].

[1]-də $c \geq 0$ şərtinin bir çox məsələlərdə təbii bir şərt kimi qarşıya çıxdığı qeyd olunur (bax [1]). Lakin çox sayda məsələdə bu şərt ödənilməyə bilər. Məsələn,

$$(E - A)x \leq b, \quad x \leq d, \quad x \geq 0, \quad c^0(b - (E - A)x) \rightarrow \max.$$

kimi məsələdə $c \geq 0$ şərtinin ödənilməsi $c^0(E - A) \leq 0$ şərtinin ödənilməsinə gəlir. Bu şərt isə həmişə doğru olmaya bilər. Çünki $c^0 \geq 0$ vektorunun koordinatlarını qərar qəbul edən kəsrlə icra olunan sifarişlərə olan münasibəti formalaşdırır. Başqa bir misal olaraq

$$(E - A)x \leq b, \quad x \leq d, \quad x \geq 0, \quad c^1x \rightarrow \max, \dots, c^kx \rightarrow \max$$

kimi qərar qəbuletmə məsələsini götürə bilərik. İndividual kriteriyalardan ən azı biri üçün $c^1 \geq 0$ şərti pozularsa, onda belə məsələnin təhlili zamanı mövcud effektiv hesablama üsullarının tətbiqi imkanları daralır.

1. Relaksasiya sxeminin şərhı

(1) məsələsinin relaksasiyasını $(E - A)^{-1} \geq 0$ şərti və məsələnin ekstremal nöqtələrinin cırlaşmayan olması şərti daxilində icra edəcəyik. İkinci şərt hər bir ekstremal nöqtədə $Ax \leq b, x \leq d, x \geq 0$ kimi $3n$ sayda olan şərtədən yalnız n dənəsinin bərabərlik şəklində ödənildiyini tələb edir. Asanlıqla yoxlanıla bilər və relaksasiya zamanı istifadə edəcəyimiz aşağıdakı xassə doğrudur.

Lemma 1. Hər bir ekstremal nöqtənin təyininə $(E - A)x = b, x_i = d_i, x_i = 0$ şərtlərindən yalnız biri iştirak edə bilər.

Relaksasiya sxeminin birinci addımı. A_i ilə A -nın i -ci sətirini işarə edək. $N = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. $G^1 \subset N$ alt çoxluğu üçün düzələn aşağıdakı kimi məsələyə baxaq:

$$(E - A^1)x \leq b^1, \quad x \geq 0, \quad cx \rightarrow \max \quad (2)$$

Burada $A_i^1 = A_i, b_i^1 = b_i, i \in G^1, A_i = 0, b_i^1 = d_i, i \in N/G^1$. (2) məsələsinin G^1 - məsələsi kimi adlandıraraq. (2)-ni, həmçinin lokal məsələ kimi təqdim edəcəyik. İstənilən (2) lokal məsələsi [1]-də adlandırılan S - məsələsi kimidir və o mövcud effektiv alqoritmlərin birinin köməyiylə asanlıqla həll oluna bilər. Bu alqoritmlərdən birinin iş sxemi belədir: a) c vektorunun $c \leq 0$ olub olmaması şərti yoxlanılır. Bu şərt ödənilərsə, onda $x^0 = 0$ optimal həldir. Əks halda $c_i > 0$ şərtini ödəyən bütün x_i dəyişənlərini $(E - A^1)x_i = b_i^1$ tənliklər sisteminin köməyiylə yerdə qalan dəyişənlərlə əvəz edib bu əvəzləməni cx -də nəzərə alırlar. Bu yolla $c_i > 0$ şərtini ödəyən bütün dəyişənləri (2)-nin yazılışından kənarlaşdırırlar və yeni (2) kimi, lakin daha kiçikölçülü məsələni tərtib edirlər. Bununla da həll alqoritminin bir iterasiyası icra olunur. b) yeni alınan (2) kimi

məsələ üçün a)-dakı prosedura təkrar olunur. c) axırınıcı alınan (2) kimi məsələnin optimal x^0 həllini geriyə addımla icra olunan əvəzləmələrdə nəzərə alıb ilkin (2) məsələsinin optimal x^1 həllini qururuq. Bu yolla təqdim olunan relaksasiya sxeminin birinci iterasiyasını icra etmiş oluruq.

Relaksasiya sxeminin ikinci addımı.

$\bar{A}^1 = A - A^1$ olsun. $\bar{b}_i^1 = b_i$, $i \in N/G^1$, $\bar{b}_j^1 = d_j$, $j \in G$ şərtləri ilə düzələn \bar{b}_i^1 sütun vektoruna baxaq. \bar{A} , \bar{b}^1 və x^1 -in köməyilə düzələn aşağıdakı hesablamaları aparaq:

$$\alpha^1 = \max_{i \in N} ((E - \bar{A}^1)x^1)_i - \bar{b}_i^1 = (E - \bar{A}^1)x_{i_0}^1 - \bar{b}_{i_0}^1 \quad (3)$$

$\alpha^1 \leq 0$ olarsa, onda x^1 (1) məsələsinin də həlli olacaqdır. $\alpha^1 \leq 0$ şərtini təklif olunan relaksasiya sxemi üçün optimallıq şərti kimi qəbul edəcəyik. Optimallıq şərti pozularsa (2) məsələsinin şərtlərinə yeni bir $((E - \bar{A}^1)x)_{i_0} \leq b_{i_0}$ şərtini əlavə edirik və (2)-dən bir şərti kənarlaşdırırıq. Kənarlaşdırılan şərt $((E - A)x)_{i_0} \leq b_{i_0}$, $x_{i_0} \leq d_{i_0}$ şərtlərindən $((E - \bar{A}^1)x)_{i_0} \leq b_{i_0}^1$ şərti ilə üst-üstə düşməyəndir. $c_{i_0} > 0$ olarsa, onda yeni daxil olan şərtəki bərabərsizliyi bərabərliklə əvəz edirik. Alınmış yeni (2) məsələsini birinci addımdakı yolla həll edib onun optimal x^2 həllini qururuq. Yeni (2) məsələsi üçün $G^2 \subset N$ alt çoxluğu belə qurulur: $G^2 = G^1 / i_0$, $x_{i_0} > d_{i_0}$ olduqda $G^2 = G^1 \cup \{i_0\}$ $((E - A)x)_{i_0} >$

b_{i_0} olduqda. Onda yeni (2) məsələsi G^2 -məsələsi olacaqdır. Bu qayda ilə optimallıq şərti doğru olana kimi G^i , $i = 1, \dots, m$ çoxluqlarının köməyilə qurulan S məsələsinin x^1, x^2, \dots, x^m optimal həllərini qururuq. Axırınıcı x^m həlli ilkin (1) məsələsinin də həlli olacaqdır. Bu hökmün doğruluğu isə aşağıdakı təklifdən alınır.

Təklif. $cx^1 < cx^2$.

Təklifin isbatı (2) məsələsini yuxarıda göstərilən S məsələsi kimi həll edən zaman malik olduğu aşağıdakı xassələrdən alınır.

Xassə 1. Hər bir yeni dəyişən bazisə daxil olduqda məqsəd funksiyası ciddi artım alır.

Bu xassənin doğruluğu $(E - A)^{-1} > 0$ və $b > 0$ şərtlərindən alınır.

Xassə 2. Optimal həllin x_i koordinatlarının artımına $((E - A)x)_i \leq b_i$ və $x_i \leq d_i$ şərtlərindən yalnız biri mane ola bilər. Bu xassə lemmadan bir nəticə kimi çıxır.

Xassə 3. G^2 məsələsinin x^2 həllinin $x_{i_0}^2$ koordinatı G^1 məsələsinin x^1 həllinin $x_{i_0}^1$ koordinatında kiçikdir: $x_{i_0}^2 < x_{i_0}^1$.

Xassə 3-ün isbatı əvvəlki iki xassədən və əlavə $((E - A^2)x)_{i_0} \leq b_{i_0}$ şərtinin daxil edilməsindən alınır.

2. Relaksasiya sxeminin ədədi misal üzərində nümayişi

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \\ 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c = (-8 \quad -1 \quad 1 \quad 2), \quad N = \{1,2,3,4\}$$

verilənlərinə görə qurulan məsələyə baxaq:

$$\begin{aligned} x_1 - 0x_1 - 0.2x_2 - 0.2x_3 - 0.2x_4 &\leq 0.6, \\ x_2 - 0.2x_1 - 0x_2 - 0.2x_3 - 0.2x_4 &\leq 0.4, \\ x_3 - 0.2x_1 - 0.2x_2 - 0x_3 - 0.2x_4 &\leq 0.7, \\ x_4 - 0.2x_1 - 0.2x_2 - 0.2x_3 - 0x_4 &\leq 0.3, \end{aligned} \quad (1')$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 1, \\ x_2 &\leq 1, \\ x_3 &\leq 1, \\ x_4 &\leq 1, \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0,$$

$$-8x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \rightarrow \max.$$

Relaksasiya sxemi $G \subset N$ çoxluğundan asılı olaraq müxtəlif variantda icra oluna bilər. Bizim baxdığımız variant onlardan biridir.

Addım 1. $G^1 = \emptyset \subset N$. Onda $A^1 = 0, b_i^1 = 1, i \in N$.

(2) məsələsini tərtib edək:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 1, \\ x_2 &\leq 1, \\ x_3 &\leq 1, \\ x_4 &\leq 1, \end{aligned} \quad (2')$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0,$$

$$-8x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max,$$

məsələnin həlli

$$x^1 = (0, 0, 1, 1)^T \quad cx^1 = 7$$

Addım 2.

$$\bar{A}^1 = A - A^1 = A, \quad \bar{b}^1 = b$$

$$\alpha^1 = \max_{1 \leq i \leq 4} ((E - \bar{A}^1)x^1)_i - \bar{b}_i^1$$

$$(E - \bar{A}^1)x^1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 1 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & -0.2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4 \\ -0.4 \\ 0.8 \\ 0.8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^1 = \max(-0.4, -0.4, 0.8, 0.8) = 0.8, i_0 = 4$$

$\alpha^1 \leq 0$ şərti, yəni opimallıq şərti ödənilmişdir. Ona görə də (2') məsələsinin şərtinə $((E - \bar{A}^1)x)_4 \leq b_4$ şərtini, yəni $-0.2x_1 - 0.2x_2 - 0.2x_3 + x_4 \leq 0.3$ şərtini əlavə edib onun $x_4 \leq 1$ şərtini isə kənarlaşdırırıq. Nəticədə $G^2 = \{4\}$ çoxluğunu və bu çoxluğa uyğun lokal G^2 məsələsini tərtib edirik

$$\begin{aligned} x_1 & \leq 1, \\ x_2 & \leq 1, \\ x_3 & \leq 1, \\ -0.2x_1 - 0.2x_2 - 0.2x_3 + x_4 & \leq 0.3, \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0,$$

$$-8x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 \rightarrow \max.$$

Alınmış S -məsələsinin yuxarıda təqdim olunan həll alqoritminə uyğun olaraq $c_3 = 1 > 0$, $c_4 = 6 > 0$ olduğu üçün x_3 və x_4 dəyişənlərini

$$\begin{aligned} x_3 & \leq 1, \\ -0.2x_1 - 0.2x_2 - 0.2x_3 + x_4 & \leq 0.3 \end{aligned}$$

sisteminin köməyiylə x_1 və x_3 -lə ifadə edib onları S -məsələsinin sonrakı həll prosesindən kənarlaşdırırıq.

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.5$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$$-8x_1 - x_2 + 1 + 6(0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.5) = -6.2x_1 + 0.2x_2 + 4 \rightarrow \max.$$

Alınmış yeni S -məsələsində müsbət əmsal kriteriyada iştirak etdiyi üçün belə əmsallı dəyişəni kənarlaşdırırıq, yəni $x_2 = 1$ qəbul edirik. Nəticədə məsələnin optimal $x^2 = (0.1, 1, 0.5)^T$ həllini qururuq. $cx^2 = 4.2 < cx^1 = 7$. x^2 həlli ilkin məsələnin bütün şərtlərini, yəni optimalıq şərtini ödəyir.

Relaksasiya sxemində iştirak edən (2)-nin lokal S -məsələlərini iterasiya yolu ilə də həll edirik. Bu yolla əvvəlcə (2) məsələsinə qoşma olan

$$\Psi(E - A^1) \geq c, \Psi \geq 0, \Psi b \rightarrow \min$$

məsələsinin Ψ^1 optimal həlli

$$\Psi^{(1)} = 0, \Psi^{(n+1)} = \max(0, c - \Psi^{(n)}A^1), n = 1, 2$$

ardıcılığı vasitəsilə $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^n = \Psi^1$ kimi tapılır. Sonra $\Psi^{(1)}$ -in köməyilə qoşma olduğu ilkin məsələnin optimal x^1 həlli ikinci ikili teoremin köməyilə bərpa olunur. Relaksasiya sxeminin ədədi misal üzərində nümayişi üçün bu üsulun münasib olmadığı işdə ondan istifadə olunmadı. Lakin iterasiya yolu relaksasiya sxeminin program formasında icrası üçün daha əlverişlidir. Belə həll yolunun ətraflı təhlili [1]-də geniş verilmişdir. İterasiya yolunun daha geniş sinif məsələlərə tətbiqi imkanı [2]-də göstərilmişdir.

3. Məsələ (1)-in reduksiyası

Tutaq ki, (1)-də $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ vektorunun koordinatlarının düzlüyü belədir: $c_i < 0, i = \overline{1, k}, c_j \geq 0, j = \overline{k+1, n}$. Bu düzlüşə uyğun

$$d^0 = (d_{k+1}, \dots, d_n), A^0 = \|a_{ij}\| (i = \overline{k+1, n}, j = \overline{k+1, n}), b^0 = (b_{k+1}, \dots, b_n)^T$$

işarələmələrini daxil edək. Asanlıqla göstərə bilərik:

$$\text{Lemma 2. } ((E - A)d - b)_i \leq ((E - A^0)d^0 - b^0)_i, i = k+1, \dots, n$$

Lemma 2-dən alırıq: $((E - A)d - b)_i \geq 0 \Rightarrow ((E - A^0)d^0 - b^0)_i \geq 0, i = k+1, \dots, n$

$Q = \{i \in N | c_i \geq 0 \vee ((E - A)d - b)_i \geq 0\}$ olsun və $Q \neq \emptyset$.

Lemma 2-dən və S -məsələsinin yuxarıda qeyd olunan həll alqoritmindən icra mexanizmindən alırıq:

Xassə 1. $((E - A)x)_i = b_i, i \in Q$ tənliklər sistemindən istifadə edərək $x_i, i \in Q$ dəyişənlərini (2) məsələsinin sonrakı həllindən kənarlaşdırıla bilirik.

Tutaq ki, $L = \{i \in N | d_i \leq b_i\} \vee L \neq \emptyset$

Xassə 2. a) (1)-dəki bütün $((E - A)x)_i = b_i, i \in L$ şərtlərini sonrakı həll prosesindən onları almaqla kənarlaşdırıla bilirik. Bu zaman yeni alınan məsələ əvvəlki strukturunu saxlayacaqdır və ona ekvivalent məsələ olacaqdır; b) Əlavə olaraq $c_i \geq 0$ olarsa, onda $x_i \leq d_i$ şərtini $x_i = d_i$ şərti ilə əvəz edib x_i dəyişənini sonrakı həll prosesindən kənarlaşdırıla bilirik. a)-nın doğru olması

$$x_i \leq d_i \Rightarrow x_i - (Ax)_i \leq d_i - (Ax)_i \leq d_i \leq b_i$$

münasibətlərindən alınır. b)-nin doğruluğu asanlıqla yoxlanılır.

ӘДӘБИҮҮАТ

1. Мееров М.В., Литвак Б.Л. Оптимизация многосвязных систем. М.: Наука, 1972.
2. Беленький В.З. Линейное программирование имеющую минимальную точку. ДАН СССР, 1968, v.183, с. 15-17

МЕТОД РЕЛАКСАЦИИ ДЛЯ ОДНОЙ БОЛЬШОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Р.Г.ГАМИДОВ

РЕЗЮМЕ

В работе предлагается метод релаксации для решения одной большой задачи линейного программирования обладающую специальную структуру. Применяются существующие, хорошо разработанные и эффективные алгоритмы для реализации отдельного шага метода. А эти алгоритмы не пригодны для решения исходной задачи. Этим отличается предлагаемая здесь схема релаксация от схемы Geoffriona. Приводится практические задачи где можно использовать предлагаемой схемы. Схема релаксация иллюстрируется на числовом примере.

Ключевые слова: линейное программирование, релаксация, базисное решение, простая итерация, двоичная задача

RELAXATION METHOD FOR ONE LARGE LINEAR PROGRAMMING

R.H.HAMIDOV

SUMMARY

A new relaxation method for one large linear programming is suggested. Each iteration of the method solves one local linear programming and efficient procedures are used to solve them. But it is impossible to use them in searching optimal solution of the initial problem. Namely, this property differs our relaxation procedure from Geoffrion method. A numerical example is solved to illustrate relaxation method.

Keywords: linear programming, relaxation, basic solution, simple iteration, binary problem

UOT 311.13,311.16

**AZƏRBAYCANIN ƏMƏK BAZARINDA
İŞSİZLİYİN EKONOMETRİK TƏDQIQI****F.Ə.MİRZƏYEV*, L.N.HÜSEYNOVA*******Bakı Dövlət Universiteti*, Azərbaycan Dövlət İqtisad Universiteti**
Farhad_1958@mail.ru, narxoz-1970@mail.ru***

Məqalədə Azərbaycanın əmək bazarında işsizliyin vəziyyəti təhlil edilmiş, işsizliyin ekonometrik modeli qurulmuşdur.

Açar sözlər: işsizlik, zaman sıraları, dəyərləndirmə kriteriyaları, əmək bazarı, ekonometrik yanaşma, riyazi gözləmə, dispersiya, infilyasiya səviyyəsi.

Ölkənin sosial-iqtisadi vəziyyətinin əsas göstəricilərindən biri əmək bazarında tələb və təklifin tarazlığıdır və bu tarazlıq dayanıqlı, dinamik inkişaf üçün böyük əhəmiyyətə malikdir.

Bütün iqtisadi sistemlər kimi əmək bazarı da tamlıq, müxtəliflik, qeyri-müəyyənlik, emergentlik və s. kimi kibernetik xarakteristikalara malik mürəkkəb kibernetik sistem kimi qarşıya çıxır. Odur ki, bu bazarın idarə edilməsi vektorunun komponentləri olaraq onun əsas xarakteristikaları arasındakı asılılıqların keyfiyyət və kəmiyyət təhlilinin sintezini təmin edən tənzimləmə mexanizmləri çıxış edir. Bu komponentlər əmək bazarının davranışı və inkişafının proqnozlaşdırılması problemlərinin optimal şəkildə həllini təmin etməlidirlər [7, 9].

Beləliklə, əmək bazarı – həm ümumi kibernetik xarakteristikaları, həm də unikalıq, zəif əlaqəlilik və məqsədyönlülük kimi özəl xarakteristikalara malik mürəkkəb iqtisadi kibernetik sistem kimi nəzərdən keçirilməli və riyazi modelləşdirmə metodu əsasında tədqiq edilməlidir. Bu riyazi tədqiqat mexanizmləri içərisində statistik məlumatların bazasında iqtisadi sistemlərin riyazi – statistik tədqiqi metodu olan ekonometrik modelləşdirmə xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Məhz ekonometrik modelləşdirmə iqtisadi nəzəriyyənin əmək bazarı üzrə irəli sürdüyü iqtisadi qanunların həqiqilik səviyyəsini kəmiyyətə ekspertiza etməyə şərait yaradır [6,14].

Bizim tədqiqatlarımızın ağırlıq mərkəzini ölkənin əmək bazarında işsizliyin səviyyəsinə təsir edən faktorların tərkibinin müəyyənləşdirilməsi və ekonometrik yanaşma əsasında bu təsirin kəmiyyətə qiymətləndirilməsidir [10, 12,15].

Tədqiqatlar göstərir ki, işsizlik problemi həm global səviyyədə, həm də milli iqtisadiyyatlar səviyyəsində əhalinin həyat səviyyəsinə və mənəvi durumuna birbaşa təsir edən faktor kimi diqqəti cəlb edir. Ölkəmizdə aparılan uğurlu sosial-iqtisadi tədbirlər son illərdə çoxsaylı yeni iş yerlərinin açılmasına və işsizliyin səviyyəsini əhəmiyyətli dərəcədə aşağı salmağa imkan vermişdir. Belə ki, son iki ildə bu göstərici 5% hüdudlarında olmuşdur.

Azərbaycanın əmək bazarında işsizliyin səviyyəsinin ekonometrik tədqiqinin informasiya təminatı olaraq 2012–2016-cı illərdə ölkədə işsizliyin aylar üzrə göstəricilərini əks etdirən statistik məlumatlardan istifadə edilmişdir. Bütün göstəricilər AR DSK-nın rəsmi saytının məlumatları əsasında müəllif tərəfindən aşağıdakı zaman sıraları şəklində formalaşdırılmışdır [1,2].

- İzah olunan dəyişən işsizlik göstəricisi (min nəfər) (UNEMPL sırası) İzahedici dəyişənlərin zaman sıraları:
- İnflyasiyanın səviyyəsi göstəricisi (mln. manatla) (CPI sırası)
- Adambaşına gəlir göstəricisi (manatla) (INC PP sırası)
- Orta aylıq əmək haqqı göstəricisi (manatla) (WAGE sırası)
- Nominal ÜDM (mln. manatla) (GDP sırası)

Zaman sıralarının bazasında ekonometrik modelləşdirmə bir sıra tələblərin gözlənilməsinə nəzərdə tutur. Bu tələblərə görə istifadə olunan zaman sırasının stasionarlığının yoxlanmalı, yəni ixtiyari t zaman momenti üçün onun $M(x)$ riyazi gözləməsinin və $D(X)$ dispersiyasının sabitliyi ekspertiza edilməli və onlar dövrü (mövsümü) komponentlərdən təmizlənməlidir. Beləliklə, iqtisadi göstəricilərin zaman sıralarının stasionar olması üçün əsas şərt kimi onun $(t+1, t+2, \dots)$ zaman momentlərindəki qiymətlərinin ən azı ehtimal baxımından $(t, t-1, t-2, \dots)$ zaman momentlərindəki qiymətlərinə oxşar olmalıdır. Tədqiqatın zaman sıraları bazasında aparılmasının zəruriliyi isə onunla bağlıdır ki, əmək bazarı üzrə eyni tezliklə ölçülən faktorlar mövcud olmur və yeganə çıxış yolu zaman modellərindən istifadə etməkdir. Bu tip modellərdə istifadə olunan zaman sıralarından hər birinin stasionarlığının yoxlanmasının zəruriliyi onunla bağlıdır ki, stasionar və qeyri-stasionar sıraları eyni üsullarla qiymətləndirmək mümkün deyil.

İqtisadi sistemləri əks etdirən göstəricilər üzrə zəif stasionarlıq halı, yəni prosesin $M(X)$ riyazi gözləməsinin və $D(X)$ dispersiyasının zamandan asılı olmayaraq mövcudluğu və avtokorrelyasiya funksiyasının yalnız zaman sırası göstəricilərinin fərqi üçün asılı olması halı tez-tez rast gəlinir. Qeyd edək ki, əmək bazarı göstəriciləri sistemi üçün də proseslərin zəif stasionarlığı halı tez-tez rast gəlinir.

Tədqiqatlar göstərir ki, əmək bazarı sistemi daxilində rast gəlinən sıraların qeyri-stasionarlığı və zəif stasionarlığı hallarının mövcudluğunun əsasında ümumi trendin mövcud olması da dura bilər. Bu halda ekonometrik modelləşdirməyə kointeqrasiya mövqeyindən yanaşmaqla belə trendləri yox etmək və sıralara stasionar xarakter vermək mümkündür.

Əmək bazarı göstəricilərinin zaman sıralarında iki tip trendə - determinləşmiş və stoxastik trendlərə rast gəlinir. Zamana görə təsadüfi olmayan funk-

siyalar kimi qarşıya çıxan determinləşmiş trendə malik zaman sıralarından (qeyd edək ki, xüsusi ədəbiyyatlarda bu sıralara TS – sıralar və ya trend baxımından stasionar sıralar deyilir) trendi yox etməklə onlara stasionar xarakter vermək mümkündür. Zamana görə təsadüfi dəyişən stoxastik trendli zaman sıraları (DS sıraları) isə müəyyən tərtibdə inteqrasiya olunmuş hesab edilir.

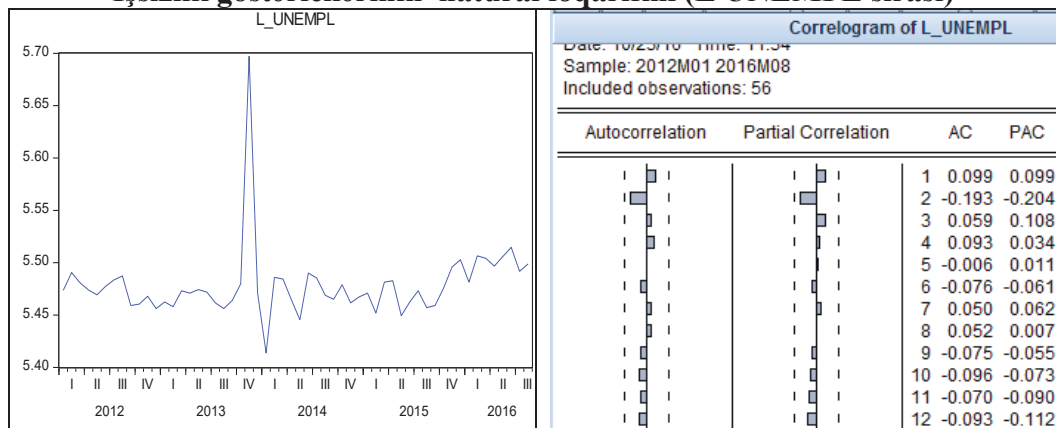
Ekonometrik modelləşdirmə prosesində zaman sıralarının stasionarlığını testləşdirmək üçün qrafiklərin zaman təhlili metodundan və korreloqram (ASF və PASF) metodundan istifadə edilir.

Avtokorrelyasiya funksiyalarının sıralarla bağlı xarakteristikalarına gəldikdə, qeyd etmək lazımdır ki, trendə görə stasionar olan zaman sıralarının bu funksiyalara əsasən qurulmuş korreloqramları qeyri-stasionar zaman sıralarının korreloqramları ilə oxşar olmaq imkanlarına malik olsalar da ACF və PACF funksiyalarının qiymətlərinin statistik əhəmiyyətli olması hallarında belə, bu qiymətlər birinci laqlarda (yəni ACF(1) və PACF(1)-də) vahidə yaxın olmayacaqlar. Zaman sıralarında mövsümlük olduqda isə ACF və PACF funksiyalarının korreloqramlarında bu mövsümlərə uyğun gələn laqlar üzrə həmin avtokorrelyasiya funksiyaları böyük qiymətlər alacaqdır [10, 15].

Təklif olunan alqoritm üzrə əmək bazarı göstəricilərinin zaman sıraları stasionarlığa testləşdirilmiş və onların stasionarlıq səviyyəsi müəyyən olunmuşdur.

Ekonometrik tədqiqatlar nəticəsində məlum olmuşdur ki, işsizlik göstəricilərinin zaman sırası (UNEMPL sırası) və onun natural loqarifmi (L_UNEMPL sırası) nisbətən sabit $M(X)$ -ə malik stasionar sıralardır. Aşağıda əmək bazarında işsizlik göstəricisinin stasionarlığa testləşdirilməsinin nəticəsini əks etdirən korreloqram verilmişdir.

İşsizlik göstəricilərinin natural loqarifmi (L_UNEMPL sırası)

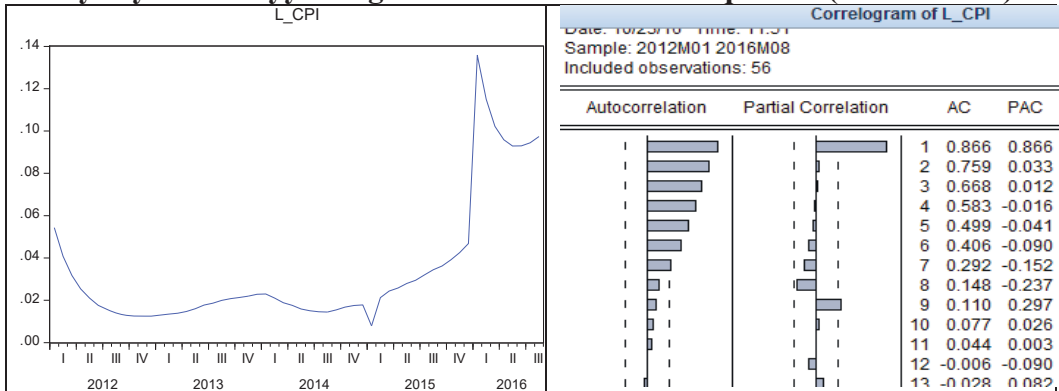


Əgər X oxuna paralel xətt keçirsək, onda bu sıranın qiymətləri həmin xəttə görə dəyişəcəkdir, yəni sıra nisbətən sabit riyazi gözləməyə malikdir. Deməli, bu sıra stasionardır. Qrafikdə 2013- cü ilin noyabrında güclü additiv sıçrayış müşahidə olunur.

Korreloqrama görə sıra stasionardır, çünki ACF 95%-lik etibarlılıq intervalında sərhədlərini aşmır.

Tədqiqat nəticəsində infilyasiyanın səviyyəsini əks etdirən CPI zaman sırası, bu sıranın loqarifmi (L_CPI sırası) qismən stasionar sıralar, ölkə üzrə adambaşına gəlir göstəricisinin zaman sırası (İNC PP sırası) və onun logarifmi (L_INC PP sırası) isə mövsümlük üzündən stasionar olmayan, lakin stasionar olmaq imkanına malik (səviyyələrdə stasionar) sıralar hesab olunmuşdur. Aşağıda infilyasiyanın səviyyəsi göstəricisinin (CPI sırası) qismən stasionar, adambaşına gəlir göstəricisi (İNC PP sırası) isə səviyyələrdə stasionar olması haqqında qərar qəbul etməyə imkan verən korreloqram əks olumuşdur.

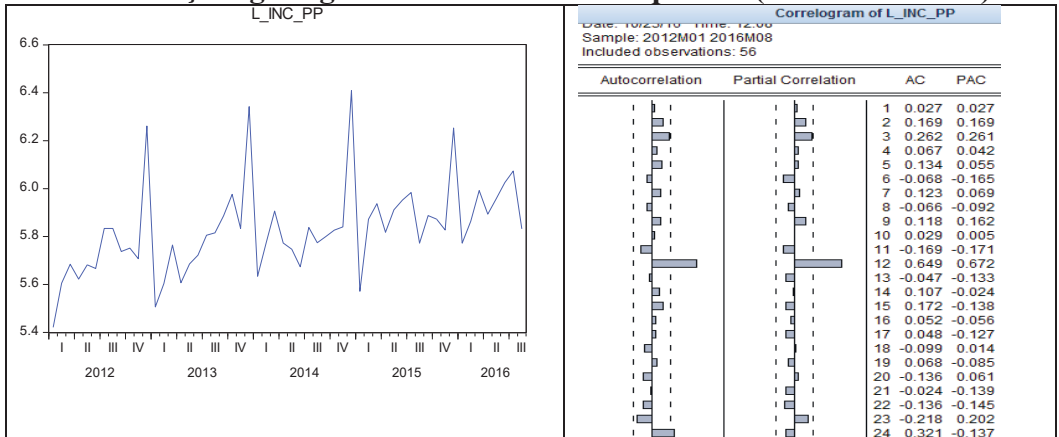
İnfilyasiyanın səviyyəsi – göstəricilərinin natural loqarifmi (L CPI sırası)



Bu sıra da qismən stasionardır, belə ki, dispersiyanın sabit olduğu dövrlər mövcuddur. Bu qrafikdə də baxılan dövrdə iki kəskin fərqlilik momentləri müşahidə olunur:
2015 – ci ilin yanvar ayı – infilyasiyanın səviyyəsinin kəskin aşağı düşməsi
2016 – cı ilin yanvar ayı – infilyasiyanın səviyyəsinin kəskin artması

Nəzəri cəhətdən sıra səviyyələrdə stasionardır, çünki birinci laqların qiymətlərdən asılı olmayaraq bir neçə ilkin qiymətlərdən sonra ACF kəskin azalır.

Adambaşına gəlir göstəricisinin natural loqarifmi (L INC PP sırası)



Sıranın xarakteristikaları İNC PP sırasındakı xarakteristikalara çox yaxındır və onlara identik hesab oluna bilər.

Sıra üçün ACF və PACF xarakteristikaları İNC PP sırasının xarakteristikalarına çox yaxındır və onlara identik hesab oluna bilər.

Tədqiqat prosesində ölkədə adambaşına gəlirin mövsümlük komponentlərindən təmizlənmiş səviyyəsinin, daha doğrusu mövsümlük nəzərə alınmaqla adambaşına gəlirin səviyyəsinin artımının natural loqarifmi (L_INC_PP_SA sırası), iqtisadiyyatda orta aylıq əmək haqqı göstəricisi (WAGE sırası) və onun natural loqarifmi (L_WAGE sırası) isə qeyri-stasionar xarakteristikalara malik zaman sıraları kimi qiymətləndirilmişdir.

Əmək bazarı üzrə göstəricilərin zaman sıralarının stasionarlığının qiymətləndirilməsində onların inteqrasiya olunma dərəcələrinin müəyyən edilməsi mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Biz bu tədqiqatımızda informasiya bazası kimi istifadə etdiyimiz zaman sıralarının inteqrasiya olunma dərəcələrini araşdırmaq üçün Diki – Fulerin genişləndirilmiş testindən (ADF testi), Filips – Perron testindən (PP testi) və Kvyatkovskiy – Fillips – Şmidt – Şinn testindən (KPSS testi) istifadə etmişik və bu mexanizmlərin köməyiylə sıralar vahid kökə testləşdirilərək onların stasionarlığı haqqında son qərar qəbul edilmişdir.

Əmək bazarı üzrə zaman sıralarının vahid kökə testləşdirilməsinin nəticələri

Göstəricilər	ADF test			PP test			KPSS test		
	Spesifikasiya.	Müshahidə.	Krit 5%	Spesifikasiya.	Müshahidə	Krit 5%	Spesifikasiya.	Müshahidə.	Krit 5% (10%)
<i>unempl</i>	I(0),C,1	-6.68	-2.92	I(0),C	-6.65	-2.92	I(0),C	0.146	0.463
<i>l_unempl</i>	I(0),C,1	-6.57	-2.92	I(0),C	-6.63	-2.92	I(0),C	0.155	0.463
<i>gdp</i>	I(0),C,1	-5.13	-2.92	I(0),C	-5.23	-2.92	I(0),C	0.141	0.463
<i>l_gdp</i>	I(0),C,1	-5.12	-2.92	I(0),C	-5.15	-2.92	I(0),C	0.129	0.463
<i>cpi</i>	I(1),N,1	-8.21	-1.95	I(1),N	-8.34	-1.95	I(1),C	0.373	0.463
<i>l_cpi</i>	I(1),N,1	-8.08	-1.95	I(1),N	-8.16	-1.95	I(0),C	0.213	0.216
<i>l_cpi_sa</i>	I(1),N,1	-8.13	-1.95	I(1),N	-8.21	-1.95	I(0),C	0.213	0.216
<i>inc_pp</i>	I(0),TC,1	-9.16	-3.49	I(0),TC	-9.16	-3.49	I(0),TC	0.033	0.146
<i>l_inc_pp</i>	I(0),TC,1	-9.23	-3.49	I(0),TC	-9.33	-3.49	I(0),TC	0.06	0.146
<i>l_inc_pp_sa</i>	I(0),TC,1	-5.01	-3.49	I(0),TC	-5.00	-3.49	I(0),TC	0.04	0.146
<i>wage</i>	I(1),C,1	-11.27	-2.92	I(1),C	-11.27	-2.92	I(0),C	0.076	0.463
<i>l_wage</i>	I(1),C,1	-12.64	-2.92	I(1),C	-12.64	-2.92	I(0),C	0.500	0.739

Mənbə: cədvəl Eviews program paketi əsasında müəllif tərəfindən tərtib edilmişdir.

Cədvəldə əks olunmuş informasiyanın tədqiqi göstərir ki, qəbul edilmiş zaman intervalında əmək bazarının tədqiqata cəlb olunmuş bütün reqressorları sabit səviyyələrdə stasionardırlar. Bu sıralamanın yalnız iki reqressor – inflyasiyanın səviyyəsi və orta aylıq əmək haqqı reqressorları pozur və tam stasionar deyillər. Lakin bu kənarlaşma da nisbi xarakter daşıyır və bu reqressorları da trendsiz və sabitsiz stasionarlığa gətirilmiş izahedici dəyişənlər hesab etmək olar. Deməli, son qərar olaraq əmək bazarı üzrə istifadə etdiyimiz reqressorların bir çoxunun [01.2012-08.2016] zaman intervalında sıfır tərtibdə inteqrasiya olunmuş hesab edə bilərik.

Müasir ekonometrika iqtisadi sistemin Y (asılı dəyişən) və X (sərbəst dəyişən) göstəriciləri arasındakı asılılığı kəmiyyətə qiymətləndirmək üçün empirik fenomen hesab edilən Greydjerə görə kəuzallıq (səbəb olmaq) prinsipi

pindən istifadə edir. Bu prinsipin əsasını belə bir müddəə təşkil edir ki, Y izah olunan dəyişən haqqında fikir söylənən zaman X izahedici dəyişəndən istifadə orta kvadratik səhvin azalmasına səbəb olur, daha doğrusu X dəyişəni Y dəyişəninə nəzərən kauzal hesab olunur. Bu halda nəzərə alınır ki, kauzallıq özünü ani olaraq büruzə verə bilməz və bunun üçün müəyyən t zamanı ($t \neq 0$) tələb olunur və istifadə olunun zaman sıralarında struktur sürüşmələrinin mövcud olması, bəzi vacib faktorların tədqiqatda iştirak etməməsi kauzal əlaqələrin spektrini təhrif edə bilər.

- Aşağıdakı cədvəldə L UNEMPL (işsizlik göstəricilərinin natural loqarifmi) və L WAGE (orta aylıq əmək haqqı göstəricisinin natural loqarifmi) sıraları arasında üzünmüddətli əlaqənin mövcudluğunun Greyndjer testi ilə yoxlanmasının nəticələri əks olunmuşdur.

Pairwise Granger Causality Tests
 Sample: 2012M01 2016M08
 Lags: 8

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
L_UNEMPL does not Granger Cause L_WAGE	48	0.48317	0.8586
L_WAGE does not Granger Cause L_UNEMPL		5.74801	0.0106

Testin nəticələri göstərir ki, əmək haqqı 8 ay gecikmə ilə (laqın optimal uzunluğu) işsizliyin səviyyəsinə əhəmiyyətli dərəcədə təsir göstərir. F-Statistic =5,748 => $p(F)=0,0106 < 0,05$ olduğu üçün belə hesab edilə bilər ki, əmək haqqı işsizlik göstəricisi üçün Greyndjer səbəb rolunu oynayır. Bu fakt iqtisadi nəzəriyyə ilə də uzlaşır, belə ki, əmək haqqı əsasən 7 - 8 aydan sonra təsir göstərməyə başlayır.

- Aşağıdakı cədvəldə L UNEMPL sırası və L INC PP SA (adambaşına gəlir göstəricisinin loqarifmi) sırası arasındakı uzunmüddətli əlaqənin mövcudluğunun Greyndjer testi ilə yoxlanmasının nəticələri əks olunmuşdur.

Pairwise Granger Causality Tests
 Sample: 2012M01 2016M08
 Lags: 1

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
L_INC_PP_SA does not Granger Cause L_UNEMPL	55	4.37436	0.0414
L_UNEMPL does not Granger Cause L_INC_PP_SA		0.43534	0.5123

Testin nəticələri göstərir ki, adambaşına gəlir göstəricisi bir aylıq gecikmə (laqın optimal uzunluğu) ilə işsizliyin səviyyəsinə əhəmiyyətli təsir göstərir. F-Statistic =4,3743 => $p(F)=0,0414 < 0,05$, olduğu üçün adambaşına gəlir göstəricisi işsizlik üçün Grendjer səbəbdir.

• Aşağıdakı cədvəldə *L UNEMPL* və *L INVEST* (işsizlik göstəricisinin natural loqarifmi ilə investisiyalar) sıraları arasında uzunmüddətli əlaqənin mövcudluğunun Greyndjer testi ilə yoxlanmasının nəticələri əks olunmuşdur.

Pairwise Granger Causality Tests
Sample: 2012M01 2016M08
Lags: 1

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
L_INVEST does not Granger Cause L_UNEMPL	55	2.30615	0.1349
L_UNEMPL does not Granger Cause L_INVEST		5.69901	0.0206

Testin nəticəsi əks əlaqənin mövcudluğuna işarə edir, yəni investisiyalar işsizliyə deyil, əksinə, işsizlik investisiyalara təsir edir. Deməli, bu göstərici işsizliyin səviyyəsinə təsir göstərmir və onu modelə daxil etməmək olar. F-Statistic =5,699 => p(F)=0,0206<0,05 olduğundan, işsizlik göstəricisi investisiya göstəricisi üçün Greyndjer səbəb rolunu oynayır.

• Aşağıdakı cədvəldə *L UNEMPL* və *L CPI*. (işsizlik göstəricisinin natural loqarifmi ilə inflyasiyanın səviyyəsinin natural loqarifmi) sıraları arasında uzunmüddətli əlaqənin mövcudluğunun Grenjer testi ilə yoxlanmasının nəticələri əks olunmuşdur.

Pairwise Granger Causality Tests
Sample: 2012M01 2016M08
Lags: 1

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
L_CPI does not Granger Cause L_UNEMPL	55	4.32994	0.0424
L_UNEMPL does not Granger Cause L_CPI		0.57050	0.4535

Testləşdirmənin nəticələri göstərir ki, inflyasiya göstəricisi bir aylıq gecikmə ilə (laqın optimal səviyyəsi) işsizliyin səviyyəsinə əhəmiyyətli dərəcədə təsir göstərir. F-Statistic =4,329 => p(F)=0,0424<0,05 olduğundan, inflyasiyanın səviyyəsi işsizlik göstəricisi üçün Greyndjer səbəbi rolunu oynayır.

Aşağıdakı cədvəldə *L UNEMPL* və *L GDP* (işsizlik göstəricisinin natural loqarifmi ilə ÜDM) arasında uzunmüddətli əlaqənin mövcudluğunun Grendjer testi ilə yoxlanmasının nəticələri əks olunmuşdur.

Pairwise Granger Causality Tests
Sample: 2012M01 2016M08
Lags: 1

Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
LGDP does not Granger Cause L_UNEMPL	55	0.41595	0.5218
L_UNEMPL does not Granger Cause LGDP		2.76639	0.1023

Testləşdirmənin nəticəsi göstəricilər arasında zəif əks əlaqənin olduğunu göstərir. Belə ki, ÜDM işsizliyə deyil, əksinə işsizlik ÜDM – ə təsir göstərir və bu göstəricini modelə daxil etməmək olar. $F\text{-Statistic} = 2,766 \Rightarrow p(F) = 0,1023 < 0,11$ olduğu üçün işsizlik göstəricisi ÜDM üçün Greyndjer səbəb rolunu oynayır.

İstifadə olunmuş testləşdirmə bazasında ölkənin əmək bazarında işsizliyin səviyyəsinin seçilmiş izahedici dəyişənlərdən asılılığının kointeqrasiya modeli qurulmuşdur.

$$LUnempl_t = 6,22 + 0,43CPI_{t-1} - 0,24LUnempl_{t-2}^* + 0,08Wage_{t-8} - 0,06LIncPPsa_t + 0,23D112013 + e_t \quad (1)$$

***Qeyd:** Bu izahedici dəyişən avtoregressiya dəyişəni olub, işsizlik göstəricisinin inert (ləng) dəyişən olduğunu, yəni öz-özünə iki aylıq gecikmə ilə təsir etdiyini göstərir.

Bu model üçün qalıqların “ağ küyə” malik olub-olmaması DF testinin vasitəsilə yoxlanmış və məlum olmuşdur ki, None spesifikasiyası səviyyəsində modelin qalıqları stasionardır. Deməli, (1) modeli laqlara və fiktiv dəyişənə malik kointeqrasiya modelidir. Ramsey testi isə bu modelin düzgün spesifikasiya olduğunu göstərmişdir. Modelin qüsürü isə ondan ibarətdir ki, DW statistikası onun qalıqlarının avtokorrelyasiyaya malik olduğunu göstərmişdir. Odur ki, (1) modelinin qalıqlarının korreloqramlarındakı iki additiv sıçrayışı nəzərə alınmaqla bu model üç fiktiv dəyişənli aşağıdakı regressiya modelinə transformasiya edilmişdir.

$$LUNEPL = 6,174901 + 0,41567CPI(-1) - 0,238702LUNEPL(-2) + 0,104946LWAGE(-8) - 0,077938INC.PP.SA + 0,229917DII2013 - 0,024209DO52014 - 0,027097D082015 \quad (2)$$

(2) modelinin statistikasının tədqiqi prosesində məlum olmuşdur ki, onun bütün izahedici dəyişənləri və additiv sıçrayışları əks etdirən fiktiv dəyişənlər statistik əhəmiyyətlidir, yəni model düzgün spesifikasiya olunmuşdur. Eləcə də məlum olmuşdur ki, bu model üçün Qaus – Markov teoreminin eqzogen parametrlər arasında ciddi xətti asılılığın mövcud olmaması ilə bağlı tələbi ödəmir, yəni (2) modeldə multikolleniarlıq yoxdur.

Bu modelin əmək bazarında mövcud situasiyaya adekvatlığının daha bir sübutu onunla əlaqədardır ki, $P(\text{Jarque-Bera}) = 0,9706 > \alpha = 0,05$ olduğundan modelin qalıqları normal paylanmaya malikdir və $1,5 < DW = 1,66 < 2,5$ olduğundan, 1-ci tərtib avtokorrelyasiya mövcud deyil. Sonuncu müddəa Breuş – Qodfri testi vasitəsilə bir daha yoxlanmış və $P_{\text{rob}} \text{RESID}(-1) = 0,2521 > \alpha = 0,05$ olduğundan təsdiqlənmişdir.

(2) modelinin Vayt statistikası əsasında testləşdirilməsi onun heteroskedastikliyə də “yoluxmadığını” aşkar etmişdir.

Beləliklə, (2) modeli üçün Qaus – Markov şərtləri tam ödənilir və onu əmək bazarında işsizliyin səviyyəsinin təhlili və proqnozlaşdırılması üçün ya-

rarlı mexanizm kimi dəyərləndirmək olar.

Biz tədqiqat prosesində əmək bazarında işsizliyin səviyyəsinin ekonometrik tədqiqatını davam etdirərək SPI sırasının (infilyasiyanın səviyyəsi göstəricisi) logariflənməmiş variantı olan L_SPI sırası ilə əvəzləyərək, (2) modelini aşağıdakı əlavəli modelə çevirmişik:

$$\begin{aligned} LUNEPL = & 6,601836 + 0,449292LCPI(-1) - 0,237237LUNEPL(-2) + \\ & + 0,091607LWAGE(-8) - 0,067578LINCPPSA + 0,229039D112013 - \\ & - 0,023274DO52014 - 0,025864DO82015 \end{aligned} \quad (3)$$

Alınmış yeni reqressiya modelinin statistik xarakteristikalarının yoxlanması aşağıdakı nəticələri vermişdir.

- Modelin bütün əmsalları üçün $P < 0,05$ şərti ödənilir, yəni (3) reqressiya tənliyinin bütün əmsalları 95% - lik qiymətlilik səviyyəsində əhəmiyyətlidirlər. Bu isə onu göstərir ki, həmin əmsallarla bağlı izahedici dəyişənlər də statistik əhəmiyyətlidirlər. Modelə daxil edilmiş fiktiv dəyişənlərin də əhəmiyyətli olması onların modelə daxil edilməsinin düzgün yanaşma olduğunu göstərir.
- Modelin statistikasına görə $F_{sta} = 94,09$ -dur, Fişer statistikasının $P_{cht}(F_{stat})$ qiyməti isə 0,00-a bərabərdir. Bu qiymət $\alpha = 0,05$ -dən kiçik olduğundan qiymət $R^2 = 0,9427$ -yə bərabər olan determinasiya əmsalı əhəmiyyətlidir və model adekvatdır. Deməli, Azərbaycan Respublikasının əmək bazarında işsizliyin variyasiyasının 94,3%-i nəzərdən keçirdiyimiz izahedici reqressorların təsiri ilə bağlıdır.
- (3) modelinin spesifikasiyası uğurludur, çünki onun Ramsey testi ilə yoxlanması zamanı F_{stat} qiyməti $Prob(F-stat) = 0.351071 > \alpha = 0,05$ alınmış və modelin spesifikasiyasının doğru olması haqqında H_0 hipotezi təsdiqlənmişdir.
- (3) modelinin multikolleniarlığa “yoluxmasının” dispersiya – infilyasiya faktorunun variyasiyası metodu ilə testləşdirilməsi aparılmış və VİF-in bütün qiymətləri üçün $VIF < 5$ şərtlərinin ödəndiyi aşkar edilmişdir. Deməli, (3) reqressiya modelində multikolleniarlıq yoxdur.
- (3) reqressiya modeli üçün qalıqların orta qiymətləri sıfıra bərabər olduğu üçün $Mean = -1,16e^{-15} \approx 0$, $E(U_i) = 0$ şərti ödənilir. $P(Jarque-Bera) = 0,9471 > \alpha = 0,05$ olduğu üçün modeldə qalıqlar normal paylanmışdır.
- (3) reqressiya modelinin DW kriteriyası, qalıqların kolleloqramının qurulması metodu və Breuş – Qodfri testi vasitəsilə avtokorrelyasiyanın mövcudluğunun testləşdirilməsi zamanı bu modeldə həm 1-ci tərtib, həm də 2-ci tərtib avtokorrelyasiyanın mövcud olmadığı məlum olmuşdur.
- (3) reqressiya modelinin Vayt testi vasitəsilə yoxlanışı göstərmişdir ki, bu model üçün qalıqların homoskedastikliyi mövcuddur və heteroskedastikliyin mövcudluğu haqqında hipotez qəbul edilmir.

Beləliklə, (2) modeli kimi, (3) reqressiya modeli üzrə də Qaus – Markov

şərtləri tam ödənilir və bu modeli də yüksək statistik xarakteristikalara malik, əmək bazarında göstəricilər arasındakı qarşılıqlı əlaqələrin təhlili və proqnozlaşdırılması üçün səmərəli mexanizm kimi dəyərləndirmək olar.

Əmək bazarında işsizliyin səviyyəsinin (2) və (3) reqressiya modellərinin keyfiyyətlərinin müqayisəsinin kəmiyyət xarakteristikaları müstəvisində aparmaq üçün müxtəlif kriteriyalardan istifadə etmək olar. Bu kriteriyalara t statistikasının qiymətləri kriteriyasını, determinasiya əmsalı və normallaşdırılmış determinasiya əmsalı kriteriyasını, modelin proqnoz qiyməti xarakteristikasını, proqnozun logarifmik səhvi kriteriyasını, informasiya kriteriyaları toplusunu (Amemiya, Akayke, Şvarts) göstərmək olar.

Qeyd edək ki, sonuncu qrup kriteriyalar (informasiya kriteriyaları) reqressiya modelinin keyfiyyətini daha dolğun əks etdirirlər. Bu kriteriyalar $AF \rightarrow \min$; $AIC \rightarrow \min$; $SIC \rightarrow \min$ şəklində formalaşdırıldığı üçün, onların qiymətləri nə qədər kiçik olarsa, model bir o qədər keyfiyyətli hesab olunacaqdır.

Aşağıdakı cədvəldə ölkənin əmək bazarında işsizliyin səviyyəsinin tədqiqi və proqnozlaşdırılması üçün tərtib etdiyimiz (2) və (3) reqressiya modellərinin bu qiymətləndirmə kriteriyaları üzrə müqayisənin nəticələri əks olunmuşdur.

Seçim kriteriyaları	2 modelinin dəyişənləri yığımı	3 modelinin dəyişənləri yığımı	Qeyd
	CPI(-1) L_UNEMPL(-2) L_WAGE(-8) L_INC_PP_SA D112013 D052014 D082015	L_CPI(-1) L_UNEMPL(-2) L_WAGE(-8) L_INC_PP_SA D112013 D052014 D082015	
p(t-ststistika)	0.0000 0.0000 0.0107 0.0200 0.0000 0.0199 0.0101	0.0000 0.0000 0.0256 0.0397 0.0000 0.0241 0.0140	Ehtimalların qiymətinə görə (2) modelinin əhəmiyyətliliyi daha yaxşıdır
R^2	0.9419	0.9427	(3) modelində daha yüksəkdir
Normallaşdırılmış R^2	0.9317	0.9326	(3) modelində daha yüksəkdir
V(%)	0.1781	0.1768	(3) modelində daha yüksəkdir, yəni bu modelin proqnoz keyfiyyəti daha yüksəkdir
EL(%)	2.0624008	2.0624007	(3) modelində daha azdır
AF	0.005328	0.00525	(3) modelində daha azdır
AIC	-6.2710	-6.2856	(3) modelində daha azdır
SIC	-5.9592	-5.9737	(3) modelində daha azdır

Beləliklə, Azərbaycan Respublikasının əmək bazarında işsizliyin səviyyəsinin təhlili və proqnozlaşdırılmasında (3) modelindən istifadə bir çox para-

metrlərə görə (2) modelindən daha əlverişlidir. Çünki bu modelin real şəraitə adekvatlığı daha yüksəkdir və onun yaxşı proqnoz keyfiyyətləri vardır. (3) modelinin anomal qalıqları yoxdur və onun bütün əmsalları 5% səviyyəsində əhəmiyyətlidir.

(3) reqressiya modelinin iqtisadi integrasiyasına əsaslanaraq Azərbaycan Respublikasının əmək bazarında işsizliyin səviyyəsinin dinamikası üzrə aşağıdakı nəticəyə gəlinir:

- Ölkədə infilyasiyanın səviyyəsinin 1 % artması işsizliyin səviyyəsini 0,449% artırır və bu zaman infilyasiya işsizliyin səviyyəsinə ani deyil, bir aydan sonra təsir göstərir. Orta aylıq əmək haqqının 1 % artımı işsizliyin səviyyəsinə 8 aydan sonra təsir edir və işsizlərin sayını 0,091% artırır. Adambaşına gəlirin artması isə işsizliyin səviyyəsinə ani olaraq neqativ təsir edir və onu 0,068% azaldır. Modelin sərbəst həddi avtonom səviyyəni əks etdirir ($LUnempl(-2)$) avtoreqressiya dəyişəninə qiyməti əlavə olunmaqla: $6,601836+(-0,237237)=6,364549$). Bu kəmiyyət göstərir ki, bütün təsiredici faktorların qiymətlərinin sıfıra bərabər olması halında (təsir yoxdur) ölkədə işsizliyin səviyyəsi 6,3646% olacaqdır. Bu hal onu göstərir ki, ölkədə işsizliyin səviyyəsinə yalnız seçdiyimiz izahedici faktorlar deyil həm də bir sıra nəzərə almadığımız faktorlar da təsir göstərir. Bu model bazasında aparılmış praktiki tədqiqatlar nəzəri qarşılıqlı əlaqələri təsdiq etdi, yəni (3) modelindən iqtisadi situasiyanı sabitləşdirmək üçün işsizliyin səviyyəsinin gələcək proqnozlaşdırılmasında istifadə etmək olar.

ƏDƏBİYYAT

1. www.stat.gov.az
2. www.maliyye.gov.az
2. Насизалов Ю.И., Кəримова У.Р., Нусейнова Л.Н. Эконометрика. Баки, 2013
3. Бородич С.А. Эконометрика. Минск, 2006
4. Васенкова Е.М., Абакумова Ю.Г., Бокова С.Ю. Практикум по эконометрике. Минск, 2015
5. Балаш В.А., Харламов А.В. Эконометрика. Саратов, 2008.
6. Гусейнова Л.Н. Вопросы эконометрического анализа рынка труда Азербайджана. Журнал «Экономика и предпринимательство». М., № 8, 2016, с. 530-536.
7. Кулиев Т.А., Азизова Э.Д., Мустафаева З.И., Байрамова С.Р. Управление человеческими ресурсами. Баку, 2012
8. Кулиев Т.А. Регулируемая рыночная экономика. Баку, 2000
9. Кулиев Т.А. Управление человеческими ресурсами (монография). Баку, 2014
10. Кристофер Доугерти «Введение в эконометрику». М., 2009.
11. Елисеева И.И. Эконометрика. М.: Финансы и статистика, 2003.
12. Эконометрика и экономико-математические методы и модели. Учебное пособие. Минск: БГЭУ, 2018
13. Damador N. Gujerati «Temel ekonometri». İstanbul, 2012
14. Насизалов Ю.И., Зеяналов М.У. Иқтисади кибернетика. Баки, 2012
15. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора философии по экономике Гусейнова Л.Н. на тему «Анализ прогнозирования рынка труда на основе эконометрических методов»

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕЗРАБОТИЦЫ НА РЫНКЕ ТРУДА АЗЕРБАЙДЖАНА

Ф.А.МИРЗОЕВ, Л.Н.ГУСЕЙНОВА

РЕЗЮМЕ

В статье анализируется ситуация безработицей на рынке труда Азербайджана, строится эконометрическая модель безработицы.

Ключевые слова: безработица, временные ряды, критерии оценки, эконометрический подход, рынок труда, математическое ожидание, дисперсия, уровень инфляции.

ECONOMETRIC INVESTIGATION OF UNEMPLOYMENT IN AZERBAIJANS LABOR MARKET

F.A.MIRZAYEV, L.N.HUSEYNOVA

SUMMARY

The article analyzes the situation of unemployment in the labor market of Azerbaijan, builds an econometric model of unemployment.

Keywords: unemployment, time series, evaluation criteria, labor market, econometric approach, mathematical expectation, variance, inflation rate.

УДК 517.95

**ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ
ЛАПЛАСА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ
НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ****Н.А.АЛИЕВ, М.Б.МУРСАЛОВА***Бакинский Государственный Университет*
nihan@aliyev.info, metanet.mursalova@mail.ru

Излагаемая работа посвящена исследованию граничной задачи для двумерного уравнения Лапласа с нелокальными граничными условиями на прямоугольной области.

Ключевые слова: Нелокальные граничные условия, фундаментальное решение, основные соотношения, необходимые условия, сингулярность, регуляризация, фредгольмовость.

Как известно, в [1]-[3] для различных областей были исследованы граничные задачи для уравнения эллиптического 1-го порядка с нелокальными граничными условиями в случае, когда одновременное движение двух точек по границе области удовлетворяет условию Карлемана [4]-[6]. Далее, в [7], [8] были исследованы граничные задачи с нелокальными граничными условиями для уравнений гиперболического и параболического типов.

Представленная работа посвящена исследованию решений граничной задачи для двумерного уравнения Лапласа в случае, когда одновременное движение по границе прямоугольной области четырех точек удовлетворяет условию Карлемана. С помощью фундаментального решения исходного уравнения получены основные соотношения. Далее, из этих соотношений выделяются необходимые условия, содержащие сингулярные слагаемые. Принадлежащей нам методикой эти сингулярности регуляризируются и, с использованием уже регулярных соотношений и граничных условий, доказывается фредгольмовость поставленной граничной задачи.

Постановка задачи: Рассмотрим следующую граничную задачу:

$$\Delta u(x_1, x_2) = 0 \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset R^2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_{ij}^{(1)}(x_1) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \alpha_{i0}^{(1)}(x_1) u(x) \right]_{\substack{x_1=at \\ x_2=0}} + \\
& + \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_{ij}^{(2)}(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \alpha_{i0}^{(2)}(x_2) u(x) \right]_{\substack{x_1=a \\ x_2=b(1-t)}} + \\
& + \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_{ij}^{(3)}(x_1) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \alpha_{i0}^{(3)}(x_1) u(x) \right]_{\substack{x_1=a(1-t) \\ x_2=b}} + \\
& + \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_{ij}^{(4)}(x_2) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \alpha_{i0}^{(4)}(x_2) u(x) \right]_{\substack{x_1=0 \\ x_2=bt}} = \varphi_i(t), \quad (2)
\end{aligned}$$

где $t \in [0;1]$, $i = \overline{1,4}$. Здесь $D = \{(0;a) \times (0;b)\}$ -прямоугольник, расположенный в первой четверти, $x_1 \in [0;a]$; $x_2 \in [0;b]$; все данные в граничных условиях (2) непрерывные вещественные функции, а сами условия линейно независимые и выбраны так, чтобы они удовлетворяли условию Карлемана при $t \in [0;1]$.

Умножая уравнение (1) на фундаментальное решение

$$U(x - \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x - \xi|, \quad (3)$$

интегрируя по области D , применив формулу Остроградского-Гаусса, с учетом свойства дельта-функции Дирака, получим первое основное соотношение:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^b \left\{ \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} U(x - \xi) - u(x) \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_1} \right]_{x_1=a} - \right. \\
& \left. - \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} U(x - \xi) - u(x) \frac{\partial u(x - \xi)}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} \right\} dx_2 - \\
& - \int_0^a \left\{ \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} U(x - \xi) - u(x) \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_2} \right]_{x_2=b} - \right. \\
& \left. - \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} U(x - \xi) - u(x) \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_2} \right]_{x_2=0} \right\} dx_1 = \\
& = \int_D u(x) \left[\frac{\partial^2 U(x - \xi)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U(x - \xi)}{\partial x_2^2} \right] dx =
\end{aligned}$$

$$= \int_D \delta(x - \xi) u(x) dx = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in D \\ \frac{1}{2} u(\xi), & \xi \in \partial D \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Каждая гармоническая в области D функция удовлетворяет первому основному соотношению (4).

Формула (4) состоит из двух частей, первая из которых определяет произвольную гармоническую в области D функцию, а вторая часть, связанная с границей области, является первым необходимым условием, не содержащим сингулярных интегралов.

Последовательно умножая уравнение (1) на $\frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_2}$,

интегрируя по области D , по аналогу 2-й формулы Грина получим второе и третье основные соотношения. Выделяя из них необходимые условия, связанные с границей области D , получим выражения, содержащие сингулярные интегралы:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_2=0} &= \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} \frac{\partial x_1}{x_1 - \xi_1} + \dots \\ \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_2=b} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=b} \frac{\partial x_1}{x_1 - \xi_1} + \dots \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=0} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0} \frac{\partial x_2}{x_2 - \xi_2} + \dots \\ \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=a} &= \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0} \frac{\partial x_2}{x_2 - \xi_2} + \dots \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=0} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \Big|_{x_2=0} \frac{\partial x_1}{x_1 - \xi_1} + \dots \\ \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=b} &= \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \Big|_{x_2=b} \frac{\partial x_1}{x_1 - \xi_1} + \dots \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_1=0} &= \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \frac{\partial x_2}{x_2 - \xi_2} + \dots \\ \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_1=a} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=a} \frac{\partial x_2}{x_2 - \xi_2} + \dots \end{aligned} \right.$$

где многоточием обозначены регулярные слагаемые. Таким образом, доказана

Теорема 2. Каждая гармоническая в области D функция удовлетворяет в ней сингулярным необходимым условиям (5), (6).

С учетом граничных условий (2) проведем в (5), (6) целесообразные замены:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\substack{\xi_2=0 \\ \xi_1=a\tau}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_1=at}} \frac{dt_1}{t-\tau} + \dots \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \Big|_{\substack{\xi_2=b \\ \xi_1=a(1-\tau)}} = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \Big|_{\substack{x_2=b \\ x_1=a(1-t)}} \frac{dt}{t-\tau} + \dots \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \Big|_{\substack{\xi_1=0 \\ \xi_2=b\tau}} = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=bt}} \frac{dt}{t-\tau} + \dots \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \Big|_{\substack{\xi_1=a \\ \xi_2=b(1-\tau)}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \Big|_{\substack{x_1=a \\ x_2=b(1-t)}} \frac{dt}{t-\tau} + \dots \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \Big|_{\substack{\xi_2=0 \\ \xi_1=a\tau}} = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_1=at}} \frac{dt}{t-\tau} + \dots \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \Big|_{\substack{\xi_2=b \\ \xi_1=a(1-\tau)}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \Big|_{\substack{x_2=b \\ x_1=a(1-t)}} \frac{dt}{t-\tau} + \dots \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \Big|_{\substack{\xi_1=0 \\ \xi_2=b\tau}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=bt}} \frac{dt}{t-\tau} + \dots \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \Big|_{\substack{\xi_1=a \\ \xi_2=b(1-\tau)}} = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \Big|_{\substack{x_1=a \\ x_2=b(1-t)}} \frac{dt}{t-\tau} + \dots \end{array} \right. \quad (8)$$

После необходимых преобразований и вычислений, получим:

$$\begin{aligned} & \alpha_{i_2}^{(1)}(a\tau) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\substack{\xi_1=a\tau \\ \xi_2=0}} - \alpha_{i_1}^{(1)}(a\tau) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \Big|_{\substack{\xi_1=a\tau \\ \xi_2=0}} + \alpha_{i_2}^{(2)}(b(1-\tau)) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\substack{\xi_1=a \\ \xi_2=b(1-\tau)}} - \\ & - \alpha_{i_1}^{(2)}(b(1-\tau)) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \Big|_{\substack{\xi_1=a \\ \xi_2=b(1-\tau)}} - \alpha_{i_2}^{(3)}(a(1-\tau)) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\substack{\xi_1=a(1-\tau) \\ \xi_2=b}} - \\ & - \alpha_{i_1}^{(3)}(a(1-\tau)) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \Big|_{\substack{\xi_1=a(1-\tau) \\ \xi_2=b}} - \alpha_{i_2}^{(4)}(b\tau) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\substack{\xi_1=0 \\ \xi_2=b\tau}} + \alpha_{i_1}^{(4)}(b\tau) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \Big|_{\substack{\xi_1=0 \\ \xi_2=b\tau}} = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \{ \varphi_i(t) - \alpha_{i_0}^{(1)}(at)u(at,0) - \alpha_{i_0}^{(2)}(b(1-t))u(a,b(1-t)) - \end{aligned}$$

$$-\alpha_{i_0}^{(3)}(a(1-t))u(a(1-t), b) - \alpha_{i_0}^{(4)}(bt)u(0, bt) \Big\} \frac{dt}{t-\tau} + \dots, \quad (9)$$

где $\tau \in [0; 1]$, $i = 1, \bar{4}$.

Подставляя в правую часть вместо граничных значений $u(x)$ ее значения из регулярных необходимых условий, и, поменяв порядок интегрирования, регуляризируем все двойные интегралы. Отметим при этом, что первое слагаемое в правой части существует в смысле главного значения Коши. Если предположить, что

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &\in C^1(0; 1) \\ \varphi_i(0) &= \varphi_i(1) = 0 \quad (i = 1, \bar{4}) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

то тогда это слагаемое существует в обычном смысле. Таким образом, доказана

Теорема 3: Пусть заданные линейно независимые граничные условия (2) удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\begin{aligned} \alpha_{i_0}^{(s)}(x_1) &\in C[0; a], \quad i, s = 1, \bar{4} \\ \alpha_{ij}^{(1)}(x_1); \alpha_{ij}^{(3)}(x_1); \alpha_{ij}^{(2)}(x_2); \alpha_{ij}^{(4)}(x_2) \end{aligned}$$

принадлежат классу Гельдера $H^{(\mu)}$, $\mu \in (0; 1)$, $i = 1, \bar{4}$, $j = 1, \bar{2}$ а функции $\varphi_i(t)$ удовлетворяют условиям (10). Тогда соотношения (9) являются регулярными.

Объединяя граничные условия (2) с полученными регулярными выражениями (9) получим достаточное условие разрешимости этой системы относительно неизвестных функций

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \Big|_{\substack{x_1=at \\ x_2=0}}; \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \Big|_{\substack{x_1=a \\ x_2=b(1-t)}}; \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \Big|_{\substack{x_1=a(1-t) \\ x_2=b}}; \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=bt}} \end{aligned} \right\}; \quad t \in [0; 1], \quad j = 1, 2.$$

Предположим, что

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^{(1)}(at) & \alpha_{12}^{(1)}(at) & \alpha_{11}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{12}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{11}^{(3)}(a(1-t)) & \alpha_{12}^{(3)}(a(1-t)) & \alpha_{11}^{(4)}(bt) & \alpha_{12}^{(4)}(bt) \\ \alpha_{21}^{(1)}(at) & \alpha_{22}^{(1)}(at) & \alpha_{21}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{22}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{21}^{(3)}(a(1-t)) & \alpha_{22}^{(3)}(a(1-t)) & \alpha_{21}^{(4)}(bt) & \alpha_{22}^{(4)}(bt) \\ \alpha_{31}^{(1)}(at) & \alpha_{32}^{(1)}(at) & \alpha_{31}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{32}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{31}^{(3)}(a(1-t)) & \alpha_{32}^{(3)}(a(1-t)) & \alpha_{31}^{(4)}(bt) & \alpha_{32}^{(4)}(bt) \\ \alpha_{41}^{(1)}(at) & \alpha_{42}^{(1)}(at) & \alpha_{41}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{42}^{(2)}(b(1-t)) & \alpha_{41}^{(3)}(a(1-t)) & \alpha_{42}^{(3)}(a(1-t)) & \alpha_{41}^{(4)}(bt) & \alpha_{42}^{(4)}(bt) \\ \alpha_{12}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{11}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{12}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{11}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{12}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{11}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{12}^{(4)}(b\tau) & \alpha_{11}^{(4)}(b\tau) \\ \alpha_{22}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{21}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{22}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{21}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{22}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{21}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{22}^{(4)}(b\tau) & \alpha_{21}^{(4)}(b\tau) \\ \alpha_{32}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{31}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{32}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{31}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{32}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{31}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{32}^{(4)}(b\tau) & \alpha_{31}^{(4)}(b\tau) \\ \alpha_{42}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{41}^{(1)}(a\tau) & \alpha_{42}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{41}^{(2)}(b(1-\tau)) & \alpha_{42}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{41}^{(3)}(a(1-\tau)) & \alpha_{42}^{(4)}(b\tau) & \alpha_{41}^{(4)}(b\tau) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (11)$$

Тогда справедлива

Теорема 4: Пусть выполнены условия Теоремы 3 и условие (11). Тогда граничная задача (1)-(2) фредгольмова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sajjadmanest M., Jahanshahi M., Aliyev N. "Tikhonov-Lavrentyev type inverse problem including Cauchy-Riemann equation", Azerb. Journal of Mathematics, Baku, January 2013, vol. 3, N 1, pp. 104-110.
2. Aliyev N.A., Mustafayeva Y.Y., Murtuzaeva S.M., "The Influence of the Carleman Condition of the Fredholm Property of the Boundary Value Problem for Cauchy-Riemann Equation", Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Baku, vol. 1, N 2, pp. 153-162, 2012.
3. Aliyev N., Fatehi M.H. Jahanshahi M. Analytic Solution for the Cauchy-Riemann Equation with Non-local Boundary Conditions in the First Semi-Quarter, Quarterly Journal of Science Tarbiat Moallem University, vol. 9, N 1, Winter 2010, Jrak. Pp. 29-40.
4. Aliyev N.A., Abbasova A. Kh., Zeynalov R.M. Non-local boundary condition for Steklov problem for the Laplace equation in boundary domain, Science Journal of Applied Mathematics and statistics, New York USA, vol. 1, N 1, 2013, pp. 1-6.
5. Huseynov R.V., Aliyev N.A, Murtuzayeva M. Influence of Karleman Condition by Investigating Boundary Value Problem for Laplace Equation. Transactions of NA of Sciences of Azerb. Vol. XXXI, N 4, 2011, pp. 73-84.
6. Aliyev N.A., Jahashanhi M., Solution of Poisson's Equation with global, local and nonlocal boundary conditions. International Journal of Mathematical Equation in Science and Technology 33 (2002), N 2, pp. 241-247.
7. Aliyev N.A., Aliquliev R.M. A boundary value problem for an equation of hyperbolic type., Spectral Theory of differential operators, Proceedings of Azerb. State University, Ser. phys. Math. Baku, 1984, pp. 3-9.
8. Aliyev N.A., Hossieni S.M. An analysis of a parabolic problem with a general (non-local and global) supplementary linear conditions. II Italian Journal of Pure and Applied Mathematics N 13 (2003), pp. 115-127.

İKİÖLÇÜLÜ LAPLAS TƏNLİYİ ÜÇÜN DÜZBUCAQDA QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

N.A.ƏLİYEV, M.B.MÜRSƏLOVA

XÜLASƏ

Təqdim olunan məqalədə düzbucaqlı oblastının sərhədboyu 4 nöqtənin hərəkəti Karleman şərtini ödəyən halda ikiölçülü Laplas tənliyi üçün baxılan qeyri-lokal sərhəd məsələsinin həlli öyrənilmişdir.

Açar sözlər: qeyri-lokal sərhəd şərtləri, fundamental həll, zəruri şərtlər, sinqulyarlıq, requlyasiya, Fredholm luq

**THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR TWO-DIMENSIONAL LAPLACE
EQUATION WITH THE NON-LOCAL BOUNDARY
CONDITIONS ON RECTANGLE**

N.A.ALİYEV, N.B.MURSALOVA

SUMMARY

The presented article deals with investigation of Solutions of the Boundary Value problem for the two-dimensional Laplace equation in case when the simultaneous motion of the four points along the boundary satisfies the Carleman condition.

Keywords: Nonlocal boundary conditions, fundamental solution, basic relations, necessary conditions, singularity, regularization, Fredholm property.

UDC 517.95

**A TIME NON-LOCAL INVERSE COEFFICIENT PROBLEM
FOR THE LONGITUDINAL WAVE PROPAGATION EQUATION****E.I.AZIZBAYOV**
Baku State University
eazizbayov@bsu.edu.az

This paper studies a time non-local inverse boundary-value problem of recovering the unknown external sources in addition to the solution. First, in order to investigate of solvability of the inverse problem, we reduce original problem to the auxiliary problem with trivial data. Using the Fourier method and contraction mappings principle, the existence and uniqueness theorem for small times is proved. Further, using the equivalence, the unique solvability of the original problem is shown.

MSC Classification: 35R30; 35A09; 35L10.

Keywords: Inverse coefficient problem, longitudinal wave propagation equation, existence and uniqueness, classical solution.

1.Introduction and problem formulation. In this work, we investigate a time non-local inverse boundary-value problem of determining the coefficients on the right hand side of the longitudinal wave propagation equation from the final overspecified data. Such problems are called inverse problems in mathematical physics. Problems of this type arise in a large field of human activity, such as seismology, mineral exploration, biology, medicine, desalination of seawater, movement of liquid in a porous medium, etc. The presence in the inverse problems of additional unknown functions requires that in the complement to the boundary conditions that are natural for a particular class of differential equations, impose some additional conditions - overdetermination conditions. The basics of the theory and practice of investigating inverse problems of mathematical physics were established and developed in the fundamental works of the outstanding scientists A.N.Tikhonov [28], M.M.Lavrentiev [18], V.K.Ivanov [10], and their followers.

Inverse coefficient problems for partial differential equations have been well studied by many authors using different methods, in particular, [1-6, 8, 9, 11-17, 22-26] et al.

In some instances, the equation of propagation of longitudinal waves arises in the theory of long waves, plasma physics, and problems of hydrody-

namics and so on [7, 19, 30]. Investigation the longitudinal wave propagation equations of interest for specialists in mathematical modeling as well as for mathematicians. In fundamental science, the equation for the propagation of longitudinal waves is considered as a Sobolev type equation. But, the inverse problems for the equation of longitudinal wave propagation have been studied relatively little, and one can get acquainted with them in the articles [20, 21,29].

Let $T > 0$ be some fixed number and denote by $D_T = \{(x,t): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$. We consider a time non-local inverse coefficient problem for the longitudinal wave propagation equation. The precise statement of the problem is in the following form: Find $u(x,t)$ and $q(t)$ satisfying

$$u_{tt}(x,t) - u_{ttxx}(x,t) - u_{xx}(x,t) = q(t)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \quad (1)$$

in D_T under the following conditions for $u(x,t)$:

$$u(x,0) = \int_0^T P_1(x,t)u(x,t)dt + \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u_t(x,0) = \int_0^T P_2(x,t)u(x,t)dt + \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$$u_x(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u(0,t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

where $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $P_1(x,t)$, $P_2(x,t)$, and $h(t)$ are known functions of $x \in [0,1]$ and $t \in [0, T]$.

Definition. The pair $\{u(x,t), q(t)\}$ defined on D_T is said to be a classical solution of the problem (1)-(5), if the functions $u(x,t) \in \tilde{C}^{2,2}(D_T)$, and $q(t) \in C[0, T]$ satisfies the relations (1)-(5), where

$$\tilde{C}^{2,2}(D_T) = \{u(x,t) : u(x,t) \in C^2(D_T), u_{ttxx}(x,t) \in C(D_T)\}.$$

To investigate problem (1)-(5) we consider the auxiliary problem: It is required to determine a pair of functions $\{u(x,t), q(t)\}$ such that $u(x,t) \in \tilde{C}^{2,2}(D_T)$, $q(t) \in C[0, T]$, from relations (1)-(4) and

$$h''(t) - u_{ttxx}(0,t) - u_{xx}(0,t) = q(t)h(t) + f(0,t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6)$$

Analogously [20], proved the following

Lemma 1. Suppose that $\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1]$, $h(t) \in C^2[0, T]$, $h(t) \neq 0$, $0 \leq t \leq T$, $f(x,t), P_1(x,t), P_2(x,t) \in C(D_T)$, and the compatibility conditions

$$h(0) = \int_0^T P_1(0,t)h(t)dt + \varphi(0), \quad h'(0) = \int_0^T P_2(0,t)h(t)dt + \psi(0),$$

hold. Then the following statements are valid:

- i) Each classical solution $\{u(x, t), q(t)\}$ of problem (1)-(5) is the solution of problem (1)- (4), (6) as well;
 ii) each solution $\{u(x, t), q(t)\}$ of problem (1)-(4), (6) is a classical solution of the problem (1)-(5) , if

$$\left(T\|P_2(0, t)\|_{C(D_T)} + \|P_1(0, t)\|_{C(D_T)} + \frac{T}{2}\|q(t)\|_{C(D_T)} \right) T < 1.$$

2. Classical solvability of inverse boundary-value problem. We seek the first component $u(x, t)$ of classical solution $\{u(x, t), q(t)\}$ of the problem (1)-(4), (6) in the form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1), \quad (7)$$

where

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

are twice differentiable functions on the interval $[0, T]$. Then applying the formal scheme of the Fourier method, from (1) and (2) we have

$$(1 + \lambda_k^2) u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = F_k(t; u, q), \quad k = 1, 2, \dots; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

$$u_k(0) = \varphi_k + P_{1k}(u), \quad u_k'(0) = \psi_k + P_{2k}(u), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

where

$$F_k(t; u, q) = f_k(t) + q(t)u_k(t), \quad f_k(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \cos \lambda_k x dx,$$

$$\varphi_k = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx,$$

$$\psi_k = 2 \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad P_{1k}(u) = 2 \int_0^1 \left(\int_0^T P_1(x, t) u(x, t) dt \right) \cos \lambda_k x dx,$$

$$P_{2k}(u) = 2 \int_0^1 \left(\int_0^T P_2(x, t) u(x, t) dt \right) \cos \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Solving the problem (8)-(9) gives

$$u_k(t) = (\varphi_k + P_{1k}(u)) \cos \beta_k t + \frac{1}{\beta_k} (\psi_k + P_{2k}(u)) \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k (1 + \lambda_k^2)} \int_0^t F_k(\tau; u, q) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

where

$$\beta_k = \frac{\lambda_k}{\sqrt{1 + \lambda_k^2}}.$$

In order to determine the first component of the classical solution of the problem (1)-(4), (6) we substitute of $u_k(t)$ ($k=1,2,\dots$) into (7) and obtain

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (\varphi_k + P_{1k}(u)) \cos \beta_k t + \frac{1}{\lambda_k} (\psi_k + P_{2k}(u)) \sin \beta_k t + \frac{1}{\beta_k (1 + \lambda_k^2)} \int_0^t F_k(\tau; u, q) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau \right\} \cos \lambda_k x. \quad (11)$$

From (6), taking into account (7), we have

$$q(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ h''(t) - f(0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (u_k(t) + u_k''(t)) \right\}. \quad (12)$$

By (10), from (8) we get

$$\begin{aligned} \lambda_k^2 (u_k''(t) + u_k(t)) &= -u_k''(t) + F_k(t; u, q) = \beta_k^2 u_k(t) + \left(1 - \frac{1}{1 + \lambda_k^2}\right) F_k(t; u, q) = \beta_k^2 u_k(t) + \beta_k^2 F_k(t; u, q) = u_k(t) \\ &= \beta_k^2 (\varphi_k + P_{1k}(u)) \cos \beta_k t + \beta_k (\psi_k + P_{2k}(u)) \sin \beta_k t \\ &\quad + \frac{\beta_k}{1 + \lambda_k^2} \int_0^t F_k(\tau; u, q) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau + \beta_k^2 F_k(t; u, q), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

In this way to determine the equation for the second component of solution of the problem (1)-(4), (6) we substitute the later expression into (12) and obtain

$$q(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ h''(t) - f(0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\beta_k^2 (\varphi_k + P_{1k}(u)) \cos \beta_k t + \beta_k (\psi_k + P_{2k}(u)) \sin \beta_k t + \frac{\beta_k}{1 + \lambda_k^2} \int_0^t F_k(\tau; u, q) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau + \beta_k^2 F_k(t; u, q)] \right\}. \quad (13)$$

Thus, finding the solution of problem (1) - (5), (6) is reduced to the finding solution of system (11), (13) with respect to the unknown functions $u(x, t)$ and $q(t)$.

To study the uniqueness of the solution to problem (1) - (4), (6), the following assertion plays an important role.

Lemma 2. If $\{u(x, t), q(t)\}$ is a classical solution of (1)-(4), (6), then the functions

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

satisfy counting system (10), on the interval $[0, T]$.

Proof. Let $\{u(x, t), q(t)\}$ be any classical solution to problem (1)-(4), (6). Multiplying both sides of Eq. (1) by the special functions $2 \cos \lambda_k x$ ($k=1, 2, \dots$), integrating by parts, and using the relations

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 u_{tt}(x, t) \cos \lambda_k x dx &= \frac{d^2}{dt^2} \left(2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \right) = u_k''(t), \quad k=1, 2, \dots, \\ 2 \int_0^1 u_{xx}(x, t) \cos \lambda_k x dx &= -\lambda_k^2 \left(2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \right) = -\lambda_k^2 u_k(t), \quad k=1, 2, \dots, \\ 2 \int_0^1 u_{ttxx}(x, t) \cos \lambda_k x dx &= -\lambda_k^2 \left(2 \int_0^1 u_{tt}(x, t) \cos \lambda_k x dx \right) = -\lambda_k^2 u_k''(t), \quad k=1, 2, \dots, \end{aligned}$$

we conclude that satisfies the Eq. (8).

Similarly, from (2) and (3) we obtain that conditions (9) are satisfied.

Thus, the system of functions $u_k(t)$ ($k=1, 2, \dots$) is a solution to problem (8), (9). From this, it directly follows that the functions $u_k(t)$ ($k=1, 2, \dots$) satisfy system (8) on $[0, T]$. The lemma is thus proved.

Obviously, if $u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx$, $k=1, 2, \dots$, is a solution to sys-

tem (10), then the functions $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x$ and $q(t)$ are also solution to the system (11), (13).

From Lemma 2 it follows that

Corollary. *Suppose that the system (11), (13) has a unique solution. Then the problem (1) - (4), (6), can't have more than one solution, i.e. if problem (1)-(4), (6) has a solution, then it is unique.*

With the purpose to study problem (1)-(4), (6), we consider the following spaces:

Denote by $B_{2,T}^3$ a set of all functions of the form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1),$$

considered in D_T , where each of the function $u_k(t)$ ($k=1, 2, \dots$) is continuous on $[0, T]$ and satisfy the following condition

$$J(u) \equiv \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

The norm in this set is defined as follows

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} = J(u).$$

Now, we denote by E_T^3 the space of vector-functions $z(x, t) = \{u(x, t), q(t)\}$, which $u(x, t) \in B_{2,T}^3$ and $q(t) \in C[0, T]$.

The norm in the set E_T^3 will be

$$\|z(x, t)\|_{E_T^3} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \|q(t)\|_{C[0, T]}.$$

It is known that $B_{2,T}^3$ and E_T^3 are the Banach spaces [27].

Now consider the operator

$$\Phi(u, q) = \{\Phi_1(u, q), \Phi_2(u, q)\}$$

in the space E_T^3 , where

$$\Phi_1(u, q) = \tilde{u}(x, t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \cos \lambda_k x, \quad \Phi_2(u, q) = \tilde{q}(t),$$

and the functions $\tilde{u}_k(t)$ ($k=1, 2, \dots$), and $\tilde{q}(t)$ are equal to the right-hand sides of (10), and (13), respectively.

It is easy to see that

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \beta_k < 1.$$

Taking into account latter relation, we have

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0, T]})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} &\leq \sqrt{6} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{3} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \sqrt{6} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |P_{1k}(u)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{3} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |P_{2k}(u)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \sqrt{6T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{6T} \|q(t)\|_{C[0, T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{q}(t)\|_{C[0, T]} &\leq \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0, T]} \left\{ \|h''(t) - f(0, t)\|_{C[0, T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right. \\ &+ \left. \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |P_{1k}(u)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |P_{2k}(u)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &+ \left. \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + T \|q(t)\|_{C[0, T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \|q(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg\}. \quad (15)$$

We impose the following conditions on the functions $\varphi, \psi, f, P_1, P_2$, and h :

$$(H_1) \quad \varphi(x) \in C^2[0,1], \varphi'''(x) \in L_2(0,1), \text{ and } \varphi'(0) = \varphi(1) = \varphi''(1) = 0;$$

$$(H_2) \quad \psi(x) \in C^2[0,1], \psi'''(x) \in L_2(0,1), \text{ and } \psi'(0) = \psi(1) = \psi''(1) = 0;$$

$$(H_3) \quad f(x,t) \in C(D_T), f_x(x,t) \in L_2(D_T), f(1,t) = 0, 0 \leq t \leq T;$$

$$(H_4)$$

$$P_1(x,t), P_{1x}(x,t), P_{1xx}(x,t), P_{1xxx}(x,t) \in C(D_T), P_{1x}(0,t) = P_{1x}(1,t) = 0, 0 \leq t \leq T;$$

$$(H_5)$$

$$P_2(x,t), P_{2x}(x,t), P_{2xx}(x,t), P_{2xxx}(x,t) \in C(D_T), P_{2x}(0,t) = P_{2x}(1,t) = 0, 0 \leq t \leq T;$$

$$(H_6) \quad h(t) \in C^2[0,T], h(t) \neq 0, 0 \leq t \leq T.$$

$$\text{Letting } P_{1x}(0,t) = P_{1x}(1,t) = P_{1xxx}(1,t) = 0, 0 \leq t \leq T.$$

By using $u_x(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(1,t) = u_{xxx}(0,t) = 0, 0 \leq t \leq T$, correspondingly we have

$$\int_0^T P_1(1,t)u(1,t)dt = 0, 0 \leq t \leq T;$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^T P_1(x,t)u(x,t)dt \right) \Big|_{x=0} = \int_0^T (P_{1x}(0,t)u(0,t) + P_1(0,t)u_x(0,t))dt = 0, 0 \leq t \leq T;$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\int_0^T P_1(x,t)u(x,t)dt \right) \Big|_{x=1} = \int_0^T (P_{1xx}(1,t)u(1,t) + 2P_{1x}(1,t)u_x(1,t) + P_1(1,t)u_{xx}(1,t))dt = 0, 0 \leq t \leq T;$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \left(\int_0^T P_1(x,t)u(x,t)dt \right)$$

$$= \int_0^T (P_{1xxx}(x,t)u(x,t) + 3P_{1xx}(x,t)u_x(x,t) + 3P_{1x}(x,t)u_{xx}(x,t) + P_1(x,t)u_{xxx}(x,t))dt \in L_2(0,1).$$

Obviously,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |P_{1k}(u)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \frac{d^3}{dx^3} \left(\int_0^T P_1(x,t)u(x,t)dt \right) \right\|_{L_2(0,1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_0^T (P_{1xxx}(x,t)u(x,t) + 3P_{1xx}(x,t)u_x(x,t) + 3P_{1x}(x,t)u_{xx}(x,t) + P_1(x,t)u_{xxx}(x,t))dt \right\|_{L_2(0,1)} \\
&\leq \|P_{1xxx}(x,t)\|_{C(D_T)} \left\| \int_0^T u(x,t)dt \right\|_{L_2(0,1)} + 3\|P_{1xx}(x,t)\|_{C(D_T)} \left\| \int_0^T u_x(x,t)dt \right\|_{L_2(0,1)} \\
&+ 3\|P_{1x}(x,t)\|_{C(D_T)} \left\| \int_0^T u_{xx}(x,t)dt \right\|_{L_2(0,1)} + \|P_1(x,t)\|_{C(D_T)} \left\| \int_0^T u_{xxx}(x,t)dt \right\|_{L_2(0,1)}. \quad (16)
\end{aligned}$$

On the other hand, it's clear that

$$\int_0^T u(x,t)dt = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x dt. \quad (17)$$

Hence we find

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^T u(x,t)dt \right)^2 dx &= \left\| \int_0^T u(x,t)dt \right\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \left(2 \int_0^1 \left(\int_0^T u(x,t)dt \right) \cos \lambda_k x dx \right) \\
&\leq \frac{T}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \int_0^1 \left(\int_0^T u(x,t)dt \right) \cos \lambda_k x dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{T}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \int_0^T u(x,t)dt \right\|_{L_2(0,1)},
\end{aligned}$$

or

$$\left\| \int_0^T u(x,t)dt \right\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{T}{2} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}. \quad (18)$$

Analogously, we can prove that

$$\left\| \int_0^T u_x(x,t)dt \right\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{T}{2} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad \left\| \int_0^T u_{xx}(x,t)dt \right\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{T}{2} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3},$$

$$\left\| \int_0^T u_{xxx}(x,t)dt \right\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{T}{2} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}. \quad (19)$$

From (16), by (18) and (19), we conclude

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |P_{1k}(u)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq (\|P_{1xxx}(x,t)\|_{C(D_T)} + 3\|P_{1xx}(x,t)\|_{C(D_T)} \\
&+ 3\|P_{1x}(x,t)\|_{C(D_T)} + \|P_1(x,t)\|_{C(D_T)}) \frac{T}{2} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}. \quad (20)
\end{aligned}$$

Similarly to the way it was done in obtaining estimate (20), we have

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |P_{2k}(u)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq (\|P_{2xxx}(x, t)\|_{C(D_T)} + 3\|P_{2xx}(x, t)\|_{C(D_T)} + 3\|P_{2x}(x, t)\|_{C(D_T)} + \|P_2(x, t)\|_{C(D_T)}) \frac{T}{2} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}. \quad (21)$$

Then from (14) and (15), taking into account (20) and (21), we find

$$\|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^3} \leq A_1(T) + B_1(T)\|q(t)\|_{C[0,T]}\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + C_1(T)\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (22)$$

$$\|\tilde{q}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_2(T) + B_2(T)\|q(t)\|_{C[0,T]}\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + C_2(T)\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (23)$$

where

$$A_1(T) = \sqrt{6}\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\sqrt{3}\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{6T}\|f_x(x, t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_1(T) = \sqrt{6}T,$$

$$C_1(T) = \frac{3\sqrt{6}}{2} \left(\sum_{i=0}^3 \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} P_1(x, t) \right\|_{C[0,T]} + \sqrt{2} \sum_{i=0}^3 \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} P_2(x, t) \right\|_{C[0,T]} \right) T,$$

$$A_2(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(0, t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + (\sqrt{T} + 1)\|f_x(x, t)\|_{L_2(D_T)} \right] \right\},$$

$$B_2(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{-2}) \right)^{\frac{1}{2}} (T + 1),$$

$$C_2(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{-2}) \right)^{\frac{1}{2}} \frac{3T}{2} \left(\sum_{i=0}^3 \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} P_1(x, t) \right\|_{C[0,T]} + \sum_{i=0}^3 \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} P_2(x, t) \right\|_{C[0,T]} \right)$$

Further, from the estimates (22) and (23), it follows that

$$\|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \|\tilde{q}(t)\|_{C[0,T]} \leq A(T) + B(T)\|q(t)\|_{C[0,T]}\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + C(T)\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (24)$$

where

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T), \quad B(T) = B_1(T) + B_2(T), \quad C(T) = C_1(T) + C_2(T).$$

Thus, the following assertion is valid

Theorem 1. *If conditions (H₁) - (H₆) and*

$$(B(T)(A(T) + 2) + C(T))(A(T) + 2) < 1, \quad (25)$$

hold, then problem (1)-(4), (6) has a unique solution in the ball

$$K = K_R(\|z\|_{E_T^3} \leq A(T) + 2) \text{ of the space } E_T^3.$$

Proof. In the space E_T^3 , we consider the equation

$$z = \Phi z, \quad (26)$$

where $z = \{u, q\}$, $\Phi(u, q) = \{\Phi_1(u, q), \Phi_2(u, q)\}$, and the components $\Phi_i(u, q)$ ($i=1,2$) of operator $\Phi(u, q)$ defined by the right sides of (11) and (13).

Now, consider the operator $\Phi(u, a)$ in the ball $K = K_R$ of the space E_T^3 . Similar to (24) we obtain that for any $z \in K_R$ the following inequalities hold:

$$\begin{aligned} \|\Phi z\|_{E_T^3} &\leq A(T) + B(T)\|q(t)\|_{C[0,T]}\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + C(T)\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} \\ &\leq A(T) + (B(T)(A(T) + 2) + C(T))(A(T) + 2), \\ \|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} &\leq (B(T)(A(T) + 2) + C(T))(\|u_1(x, t) - u_2(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \|q_1(t) - q_2(t)\|_{C[0,T]}). \end{aligned}$$

Then by (25), from (11) and (13) it follows that the operator Φ acts in the ball $K = K_R$, and satisfy the conditions of the contraction mapping principle. Therefore the operator Φ has a unique fixed point $\{z\} = \{u, q\}$ in the ball $K = K_R$, which is a solution of equation (26); i.e. the pair $\{u, q\}$ in the sphere $K = K_R$ is the unique solution of the systems (11), (13) in $K = K_R$.

Then the function $u(x, t)$ as an element of space $B_{2,T}^3$ is continuous and has continuous derivatives $u_x(x, t)$ and $u_{xx}(x, t)$ in D_T .

It is easy to see that the functions $u_t(x, t)$, $u_{tt}(x, t)$, and $u_{txx}(x, t)$ are continuous in D_T .

Further, it is possible to verify that Eq. (1) and conditions (2), (3), (4), (6) are satisfied in the usual sense. Consequently, $\{u(x, t), q(t)\}$ is a solution of (1) - (4), (6), and by Lemma 2 it is unique in the ball $K = K_R$. The proof is complete.

From Theorem 1 and Lemma 2, implies the unique solvability of the original problem (1) - (5).

The result on the existence and uniqueness of a classical solution to (1)-(5) is encapsulated in the next theorem.

Theorem 2. *Suppose that all assumptions of Theorem 1, the condition*

$$\left(T\|P_2(0, t)\|_{C(D_T)} + \|P_1(0, t)\|_{C(D_T)} + \frac{T}{2}(A(T) + 2) \right) T < 1,$$

and the compatibility conditions

$$h(0) = \int_0^T P_1(0, t)h(t)dt + \varphi(0), \quad h'(0) = \int_0^T P_2(0, t)h(t)dt + \psi(0)$$

hold. Then problem (1) - (5) has a unique classical solution in the ball $K = K_R$ of the space E_T^3 .

3. Conclusion. The aim of this study was to investigate the unique solvability of the inverse coefficient problem for nonlinear pseudo-hyperbolic equation. First, the original problem was reduced to an auxiliary problem with trivial data. Applying the Fourier method and contraction mappings principle, the existence and uniqueness of the solution of the equivalent problem for small times are shown. Further, using the equivalence, the unique solvability of the original problem is proved.

REFERENCES

1. Akhundov A.Ya., Gasanova A.I. Determination of the coefficient of a semilinear parabolic equation for a boundary-value problem with nonlinear boundary condition // Ukrainian Mathematical Journal, 2014, vol. 66, Issue 6, pp.949-954.
2. Aliev Z.S, Mehraliev Y.T. An inverse boundary value problem for a second-order hyperbolic equation with nonclassical boundary conditions // Doklady Mathematics, 2014, vol. 90, Issue 1, pp. 513-517.
3. Azizbayov E.I. The nonlocal inverse problem of the identification of the lowest coefficient and the right-hand side in a second-order parabolic equation with integral conditions // Boundary Value Problems, 2019, vol. 2019, Issue 11, pp.1-19.
4. Azizbayov E.I., Mehraliyev Y.T., Solvability of nonlocal inverse boundary-value problem for a second-order parabolic equation with integral conditions // Electronic Journal of Differential Equations, vol. 2017, Issue 125, 2017, pp.1-14.
5. Cannon J.R., Lin Y.P. Determination of a parameter $\rho(t)$ in some quasi-linear parabolic differential-equations // Inverse Problems, 1988, vol. 4, Issue 1, pp.35-45.
6. Eskin G. Inverse problems for general second order hyperbolic equations with time-dependent coefficients // Bulletin of Mathematical Sciences, 2017, vol. 7, no 2, pp.247-307.
7. Ikezi H. Experimental study of solitons in plasma // Solitons When in Use, 1981, Mir, Moscow, pp. 163-184 (in Russian).
8. Isakov V. An inverse hyperbolic problem with many boundary measurements // Communications in Partial Differential Equations, 1991, vol.16, Issue (6-7), pp. 1183-1195.
9. Ivanchov M.I., Kinash, N.E. Inverse problem for the heat-conduction equation in a rectangular domain // Ukrainian Mathematical Journal, 2018, vol. 69, Issue 12, pp.1865-1876.
10. Ivanov V.K. On linear problems which are not well-posed // Doklady Akademii Nauk SSSR, 1962, vol.145, No 2, pp. 270-272 (in Russian).
11. Janno J., Šeletski A. Reconstruction of coefficients of higher order nonlinear wave equations by measuring solitary waves // Wave Motion, 2015, vol. 52, pp.15-25.
12. Jiang D.J., Liu Y.K., Yamamoto M. Inverse source problem for the hyperbolic equation with a time-dependent principal part, Journal of Differential Equations, 2017, vol. 262, no 1, pp.653-681.
13. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-posed Problems. Theory and Applications. de Gruyter, Berlin, 2012, 475 p.
14. Kamynin V.L. Inverse problem of simultaneously determining the right-hand side and the coefficient of a lower order derivative for a parabolic equation on the plane // Differential Equations, 2014, vol. 50, Issue 6, pp.792-804.
15. Kostin A.B., Prilepko A.I. On some problems of restoration of a boundary condition for a parabolic equation.1 // Differential Equations, vol. 32, Issue 1, pp. 113-122.
16. Kostin A.B., Prilepko A.I. Some problems of restoring the boundary condition for a parabolic equation.2 // Differential Equations, vol. 32, Issue 11, pp.1515-1525.
17. Kozhanov A.I. Composite type equations and inverse problems. Inverse and ill-posed problems series, De Gruyter, 1999, 171 p.

18. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Vasiliev V.G. Multidimensional inverse problems for differential equations. Lecture notes in mathematics, Berlin, Springer Berlin Heidelberg, 1970, 72 p.
19. Longren K. Experimental study of solitons in nonlinear transfer problems with dispersion // Solitons When in Use, 1981, Mir, Moscow, pp. 138-162 (in Russian).
20. Megraliev Y.T., Alizade F.K. Inverse boundary value problem for a Boussinesq type equation of fourth order with nonlocal time integral conditions of the second kind // Vestnik Udmurtskogo Universiteta, Matematika, Mekhanika, Komp'yuternye Nauki, 2016, vol. 26, Issue 4, pp. 503-514 (in Russian).
21. Namsaraeva G.V. Inverse problems of recovering external sources in the equation of longitudinal wave propagation // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2016, vol.10, pp.386-396.
22. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. CRC Press, 2000, 744 p.
23. Prilepko A.I., Tkachenko D.S. Properties of solutions of a parabolic equation and the uniqueness of the solution of the inverse source problem with integral overdetermination // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2003, vol. 43, no. 4, pp. 562-570 (in Russian).
24. Pyatkov S.G. On some classes of inverse problems for parabolic equations // Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 2011, vol.18, Issue 8, pp. 917-934.
25. Shcheglov A.Y. Inverse coefficient problem for a quasilinear hyperbolic equation with final overdetermination // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2006, vol. 46, no 4, pp.616-635.
26. Slodička M., Šeliga L. Determination of a time-dependent convolution kernel in a nonlinear hyperbolic equation // Inverse Problems in Science and Engineering, 2016, vol. 24, no 6, pp.1011-1029.
27. Tekin I., Mehraliyev Y.T., Ismailov M.I., Existence and uniqueness of an inverse problem for nonlinear Klein-Gordon equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2019, vol.42, no.10, pp.3739-3753.
28. Tikhonov A.N. On stability of inverse problems // Doklady Mathematics, 1943, vol. 39, Issue 5, pp. 195-198 (in Russian).
29. Utkina E.A. Uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for an n -dimensional pseudoparabolic equation // Differential Equations, 2012, vol.48, no.10, pp.1443-1449 (in Russian).
30. Whitham G.B. Linear and nonlinear waves. John Wiley and Sons, 1974, 638 p.

UZUNA YAYILAN DALĞA TƏNLİYİ ÜÇÜN ZAMANA GÖRƏ QEYRİ-LOKAL TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

E.İ.ƏZİZBƏYOV

XÜLASƏ

Təqdim olunan işdə uzuna yayılan dalğa tənliyi üçün zamana görə qeyri-lokal tərs sərhəd məsələsinin həllolunamlığı tədqiq olunmuşdur. Əvvəlcə baxılan məsələ eyni verilənlər daxilində köməkçi ekvivalent məsələyə gətirilmiş, sonra Furye üsulunun və sıxılmış inikas prinsipinin köməyi ilə kiçik zaman fasiləsi üçün ekvivalent məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi isbat olunmuşdur. Daha sonra isə, ekvivalentlik şərtindən istifadə edərək baxılan məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi göstərilmişdir.

Açar sözlər: tərs sərhəd məsələsi, uzuna yayılan dalğa tənliyi, varlıq və yeganəlik, Furye üsulu, klassik həll.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ПО ВРЕМЕНИ ОБРАТНАЯ КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ

Э.И. АЗИЗБЕКОВ

РЕЗЮМЕ

Работа посвящена исследованию разрешимости обратной коэффициентной задачи для уравнения распространения продольных волн. Основной целью исследования является доказательство существования и единственности классического решения обратной краевой задачи. При решении исходной краевой задачи осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. С помощью метода Фурье и сжатых отображений доказываем разрешимость вспомогательной обратной задачи. Далее, с использованием эквивалентности задач доказываем существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная коэффициентная задача, уравнение распространения продольных волн, существование и единственность, метод Фурье, классическое решение.

УДК 514.763

**КРИВИЗНЫ ДИАГОНАЛЬНОГО ЛИФТА РИМАНОВОЙ
МЕТРИКИ В РАССЛОЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ КОРЕПЕРОВ****Г.ФАТТАЕВ***Бакинский Государственный Университет**h-fattayev@mail.ru*

В работе строится диагональный лифт Римановой метрики в расслоении линейных кореперов над Римановым многообразием, исследуются свойства кривизны и метрическая связность с нетривиальным кручением этой метрики.

Ключевые слова: Риманова метрика, расслоение кореперов, адаптированный репер, диагональный лифт, тензор кривизны, скалярная кривизна.

Изучение лифтов дифференциально-геометрических структур в расслоенных пространствах замечательно тем, что эти лифты в основном наследуют свойства соответствующих базовых структур. лифты векторных полей в касательном расслоении Риманова многообразия впервые были изучены Сасаки [12] (см. также [15]). В той же работе на касательном расслоении была определена Риманова метрика, далее называемая метрикой Сасаки или диагональным лифтом римановой метрики (см. [3], [6]). Свойства метрики Сасаки изучены в целом ряде работ, обзор которых можно найти в [16]. В [3] был рассмотрен вопрос о кривизнах касательного расслоения с метрикой Сасаки. Подобные Римановы метрики были построены также в кокасательном и тензорных расслоениях, в расслоениях линейных реперов и линейных кореперов (см., напр. [1], [2], [4], [5], [8], [9], [13], [14]). Целью данной работы является изучение вопроса о кривизнах расслоения линейных кореперов с диагональным лифтом Римановой метрики. В разделе 2 кратко описываются основные определения и результаты, которые будут использованы позже, после чего диагональный лифт Римановой метрики на расслоении линейных реперов строится в разделе 3. Коэффициенты и основные свойства связности Леви-Чивита диагонального лифта Римановой метрика изучаются в разделе 4. В разделе 5 определяется тензорное поле кривизны связности Леви-Чивита диагонального лифта Римановой метрики и исследуется скалярная кривизна расслоения линейных кореперов с метрикой Сасаки. Скалярная кривизна

метрической связности с нетривиальным кручением диагонального лифта Римановой метрики на расслоении линейных кореперов изучается в разделе 6.

1. Предварительные сведения

Пусть M n -мерное Риманово многообразие класса C^∞ и $F^*(M)$ его расслоение линейных кореперов (см., [10], [11]). Риманову метрику на M обозначим через g . Расслоение линейных кореперов $F^*(M)$ над M состоит из всех пар (x, u^*) , где x точка из M и u^* есть базис (корепер) для кокасательного пространства T_x^*M . Естественную проекцию расслоения $F^*(M)$ в M обозначим через π и определим по формуле $\pi(x, u^*) = x$. Пусть $(U; x^1, x^2, \dots, x^n)$ система локальных координат в M , тогда корепер $u^* = (X^\alpha) = (X^1, X^2, \dots, X^n)$ для T_x^*M можно выразить однозначно в виде $X^\alpha = X_i^\alpha(dx^i)_x$ и поэтому

$$(\pi^{-1}(U); x^1, x^2, \dots, x^n, X_1^1, X_2^1, \dots, X_n^n)$$

является системой локальных координат в $F^*(M)$ (см., [8]). Индексы $i, j, k, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ принимают значения $\{1, 2, \dots, n\}$, а индексы A, B, C, \dots в

$$\{1, \dots, n, n+1, \dots, n+n^2\}.$$

Положим $h_\alpha = \alpha \cdot n + h$. $\mathfrak{S}_s^r(M)$ является множеством всех дифференцируемых тензорных полей типа (r, s) на M и ∇ -линейная связность на M с дщлфльными коэффициентами Γ_{ij}^k . Рассмотрим векторное и ковекторное (1-форма) поля $V \in \mathfrak{S}_0^1(M)$, $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(M)$ и пусть $V = V^i \partial_i$, $\omega = \omega_i dx^i$ их локальные выражения в $U \subset M$, соответственно. Тогда полный и горизонтальный лифты ${}^C V, {}^H V \in \mathfrak{S}_0^1(F^*(M))$ векторного поля V и β -ый вертикальный лифт ${}^{V_\beta} \omega \in \mathfrak{S}_0^1(F^*(M))$ ($\beta = 1, 2, \dots, n$) ковекторного поля ω заданы, соответственно, в виде

$${}^C V = V^i \partial_i - X_j^\alpha (\partial_i V^j) \partial_{i_\alpha}, \quad (2.1)$$

$${}^H V = V^i \partial_i + X_j^\alpha \Gamma_{ik}^j V^k \partial_{i_\alpha}, \quad (2.2)$$

$${}^{V_\beta} \omega = \delta_\beta^\alpha \sum_i \omega_i \partial_{i_\alpha} \quad (2.3)$$

относительно натурального репера $\{\partial_i, \partial_{i_\alpha}\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial X_i^\alpha} \right\}$ (более подробно

см., [10]).

Вертикальным лифтом дифференцируемой функции $f \in \mathfrak{S}_0^0(M)$ называется функция ${}^V f \in \mathfrak{S}_0^0(F^*(M))$, определяемая в виде ${}^V f = f \circ \pi$.

Для каждой точки $x \in M$, на кокасательном пространстве T_x^*M для всех $\omega, \theta \in \mathfrak{S}_1^0(M)$ определяется скалярное произведение $g^{-1} = (g^{ij})$ в виде $g^{-1}(\omega, \theta) = g^{ij} \omega_i \theta_j$.

2. Диагональный лифт Римановой метрики

Метрику Сасаки ${}^D g$ в расслоении $F^*(M)$ определяем при помощи следующих трех равенств:

$${}^D g({}^H X, {}^H Y) = {}^V(g(X, Y)) = g(X, Y) \circ \pi, \quad (3.1)$$

$${}^D g({}^H X, {}^{V\beta} \omega) = 0, \quad (3.2)$$

$${}^D g({}^{V\beta} \omega, {}^{V\gamma} \theta) = \delta^{\beta\gamma} {}^V(g^{-1}(\omega, \theta)) = \delta^{\beta\gamma} (g^{-1}(\omega, \theta) \circ \pi) \quad (3.3)$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ и $\omega, \theta \in \mathfrak{S}_1^0(M)$. Метрику ${}^D g$ назовем диагональным лифтом Римановой метрики g заданной на M в расслоение линейных кореперов $F^*(M)$. Поскольку любое тензорное поле типа $(0,2)$ на $F^*(M)$ полностью определяется его воздействием на векторные поля типа ${}^H X$ и ${}^{V\beta} \omega$, из этого следует, что ${}^D g$ полностью определяется равенствами (3.1), (3.2) и (3.3). Метрика ${}^S g$ является Римановой метрикой на $F^*(M)$, однозначно определяемой метрикой g .

Для системы координат (U, x^i) в M мы положим

$$X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \theta^{(i)} = dx^i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда из (2.2) и (2.3) видно, что ${}^H X_{(i)}$ и ${}^{V\alpha} \theta^{(i)}$ имеют соответственно локальные выражения вида

$$D_i = {}^H X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i} + X_j^\alpha \Gamma_{ih}^j \frac{\partial}{\partial X_h^\alpha}, \quad (3.4)$$

$$D_{i\alpha} = {}^{V\alpha} \theta^{(i)} = \sum_j \delta_j^i \delta_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial X_j^\beta} = \frac{\partial}{\partial X_i^\alpha}. \quad (3.5)$$

Мы называем множество $\{D_I\} = \{D_i, D_{i\alpha}\} = \{{}^H X_{(i)}, {}^{V\alpha} \theta^{(i)}\}$ репером, адаптированным к связности Леви-Чивита ∇_g Римановой метрики g .

Из равенств (2.2), (2.3), (3.4) и (3.5) видно, что ${}^H V$ и $V_\alpha \omega$ имеют соответственно компоненты

$${}^H V = V^i D_i, {}^H V = ({}^H V^I) = \begin{pmatrix} V^i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$V_\alpha \omega = \sum_i \omega_i \delta_\alpha^\beta D_{i_\alpha}, V_\alpha \omega = (V_\alpha \omega^I) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_\alpha^\beta \omega_i \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

по отношению к адаптированному реперу $\{D_I\}$.

Из (3.1), (3.2) и (3.3) также следует, что

$${}^D g_{ij} = {}^D g(D_i, D_j) = {}^V (g(\partial_i, \partial_j)) = g_{ij},$$

$${}^D g_{i_\alpha j} = {}^D g(D_{i_\alpha}, D_j) = 0,$$

$${}^D g_{i_\alpha j_\beta} = {}^D g(D_{i_\alpha}, D_{j_\beta}) = \delta^{\alpha\beta V} (g^{-1}(dx^i, dx^j)) = \delta^{\alpha\beta} g^{ij},$$

т.е. метрика ${}^D g$ bvttn компоненты в виде

$${}^S g = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & \delta^{\alpha\beta} g^{ij} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

по отношению к адаптированному реперу $\{D_I\}$.

В $\pi^{-1}(U)$ рассмотрим локальные 1-формы $\tilde{\eta}^I$, определяемые в виде

$$\tilde{\eta}^I = \bar{A}^I{}_J dx^J,$$

где

$$A^{-1} = (\bar{A}^I{}_J) = \begin{pmatrix} \bar{A}^i{}_j & \bar{A}^i{}_{j_\beta} \\ \bar{A}^{i_\alpha}{}_j & \bar{A}^{i_\alpha}{}_{j_\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -X_m^\alpha \Gamma_{ij}^m & \delta_\beta^\alpha \delta_i^j \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Матрица (3.9) является обратной к матрице

$$A = (A_K{}^J) = \begin{pmatrix} A_k{}^j & A_{k_\gamma}{}^j \\ A_k{}^{j_\beta} & A_{k_\gamma}{}^{j_\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_k^j & 0 \\ X_m^\beta \Gamma_{jk}^m & \delta_\gamma^\beta \delta_j^k \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

преобразования $D_K = A_K{}^J \partial_J$ (см. (3.4) и (3.5)). Легко установить, что набор $\{\tilde{\eta}^I\}$ представляет собой репер, сопряженный по отношению к адаптированному реперу $\{D_K\}$, т.е.

$$\tilde{\eta}^I(D_K) = \bar{A}^I{}_J A_K{}^J = \delta_K^I.$$

Поскольку адаптированный репер неголономен, мы положим

$$[D_I, D_J] = \Omega_{IJ}{}^K D_K$$

откуда следует, что

$$\Omega_{IJ}{}^K = (D_I A_J{}^L - D_J A_I{}^L) \bar{A}_L{}^K.$$

Согласно (3.4), (3.5), (3.9) и (3.10), компоненты объекта неголономности $\Omega_{IJ}{}^K$ определяются в виде

$$\begin{cases} \Omega_{ij\beta}{}^{k\gamma} = -\Omega_{j\beta i}{}^{k\gamma} = -\delta_{\beta}^{\gamma} \Gamma_{ik}^j, \\ \Omega_{ij}{}^{k\gamma} = X_m^{\gamma} R_{ijk}^m, \end{cases} \quad (3.11)$$

все остальные компоненты равны нулю, здесь R_{ijk}^m - локальные компоненты тензорного поля кривизны R связности ∇_g .

3. Связность Леви-Чивита метрики ${}^D g$

Пусть ${}^D \nabla$ - связность Леви-Чивита, определяемая метрикой ${}^D g$ на расслоении линейных реперов $F^*(M)$. Полагаем, что

$${}^D \nabla_{D_I} D_J = {}^D \Gamma_{IJ}^K D_K,$$

где ${}^D \Gamma_{IJ}^K$ компоненты линейной связности ${}^D \nabla$.

Из соотношения

$${}^S \nabla_X Y - {}^S \nabla_Y X = [X, Y], \forall X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(F^*(M))$$

получим:

$${}^D \Gamma_{IJ}^K - {}^D \Gamma_{JI}^K = \Omega_{IJ}{}^K. \quad (4.1)$$

По отношению к адаптированному реперу $\{D_K\}$, равенство

$$({}^S \nabla_X {}^S g)(Y, Z) = 0$$

имеет форму

$$D_L {}^D g_{IJ} - {}^D \Gamma_{LI}^K {}^D g_{KJ} - {}^D \Gamma_{LJ}^K {}^D g_{IK} = 0. \quad (4.2)$$

Пользуясь равенствами (4.1) и (4.2), получим:

$$\begin{aligned} {}^D \Gamma_{IJ}^K &= \frac{1}{2} {}^D g^{KL} (D_I {}^D g_{LJ} + D_J {}^D g_{IL} - D_L {}^D g_{IJ}) + \\ &+ \frac{1}{2} (\Omega_{IJ}{}^K + \Omega_{IJ}{}^K + \Omega_{JI}{}^K), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\Omega_{IJ}{}^K = {}^D g^{KL} {}^D g_{PJ} \Omega_{LI}{}^P$ и

$$({}^S g)^{-1} = ({}^S g^{KJ}) = \begin{pmatrix} g^{kj} & 0 \\ 0 & \delta_{\gamma\beta} g^{kj} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Используя (3.4), (3.5), (3.8) и (4.4), из (4.3) получаем:

$$\begin{cases} D\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k, & D\Gamma_{i\alpha j\beta}^k = D\Gamma_{i\alpha j}^{k\gamma} = D\Gamma_{i\alpha j\beta}^{k\gamma} = 0, \\ D\Gamma_{ij\beta}^k = \frac{1}{2} X_m^\beta R_{i\cdot}^{kjm}, & D\Gamma_{i\alpha j}^k = \frac{1}{2} X_m^\alpha R_{j\cdot}^{kim}, \\ D\Gamma_{ij}^{k\gamma} = \frac{1}{2} X_m^\gamma R_{ijk}^m, & D\Gamma_{ij\beta}^{k\gamma} = -\delta_\gamma^\beta \Gamma_{ik}^j. \end{cases} \quad (4.5)$$

Пусть $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{S}_0^1(F^*(M))$ and $\tilde{X} = \tilde{X}^I D_I, \tilde{Y} = \tilde{Y}^J D_J$. Тогда ковариантная производная ${}^S \nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X}$ вдоль \tilde{Y} по отношению к адаптированному реперу $\{D_I\}$ имеет компоненты в виде

$${}^S \nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X}^I = \tilde{Y}^J D_J \tilde{X}^I + {}^S \Gamma_{JK}^I \tilde{X}^K \tilde{Y}^J. \quad (4.6)$$

Из (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (4.5) и (4.6) следует [2].

Теорема 4.1. Пусть M - Риманово многообразие с метрикой g , а ${}^D \nabla$ - связность Леви-Чивита расслоения линейных кореперов $F^*(M)$, оснащенного метрикой ${}^D g$. Тогда ${}^D \nabla$ удовлетворяет соотношения

- i) ${}^D \nabla_{V_\alpha \omega} V_\beta \theta = 0,$
- ii) ${}^D \nabla_{V_\alpha \omega} {}^H Y = \frac{1}{2} {}^H (R(\tilde{X}^\alpha, \tilde{\omega})Y),$
- iii) ${}^D \nabla_{H_X} V_\beta \theta = V_\beta (\nabla_X \theta) + \frac{1}{2} {}^H (R(\tilde{X}^\beta, \tilde{\theta})X),$
- iv) ${}^D \nabla_{H_X} {}^H Y = {}^H (\nabla_X Y) + \frac{1}{2} \overline{R(X, Y)}$

для любых $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ и $\omega, \theta \in \mathfrak{S}_1^0(M)$, где $\tilde{\omega} = g^{-1} \circ \omega \in \mathfrak{S}_0^1(M)$, $\tilde{\theta} = g^{-1} \circ \theta \in \mathfrak{S}_0^1(M)$, $\tilde{X}^\alpha = g^{-1} \circ X^\alpha \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ и $\overline{R(X, Y)}$ вертикальное векторное поле с компонентами

$$\overline{R(X, Y)} = \begin{pmatrix} 0 \\ X_m^\alpha R_{jki}^m X^j Y^k \end{pmatrix}$$

по отношению адаптированного репера $\{D_I\}$.

Отметим, что аналог Теоремы 4.1 в случае кокасательного расслоения доказан в [9].

Замечание 4.2. Используя равенство (2.3), легко установить, что вертикальное векторное поле $\overline{R(X, Y)} \in \mathfrak{S}_0^1(F^*(M))$ можно представить в виде

$$\overline{R(X, Y)} = \sum_{\beta=1}^n V_\beta (X \circ R(X, Y)). \quad (4.7)$$

4. Тензорное поле кривизны ${}^D \nabla$

Пусть ${}^D R$ - тензорное поле кривизны связности Леви-Чивита ${}^D \nabla$. Тогда имеем:

$${}^D R(D_I, D_J)D_K = {}^D \nabla_I {}^D \nabla_J D_K - {}^D \nabla_J {}^D \nabla_I D_K - \Omega_{IJ} {}^L D \nabla_L D_K,$$

где ${}^D \nabla_I = {}^D \nabla_{D_I}$. Тензорное поле кривизны ${}^D R$ имеет компоненты

$${}^D R_{IJK}^L = D_I {}^D \Gamma_{JK}^L - D_J {}^D \Gamma_{IK}^L + {}^D \Gamma_{IP}^L {}^D \Gamma_{JK}^P - {}^D \Gamma_{JP}^L {}^D \Gamma_{IK}^P - \Omega_{IJ} {}^P D \Gamma_{PK}^L$$

По отношению адаптированного репера $\{D_I\}$. Принимая во внимание (3.11) и (4.5), мы устанавливаем, что компоненты тензорного поля кривизны ${}^D R$ связности Леви-Чивита ${}^D \nabla$ по отношению к адаптированному реперу $\{D_I\}$ имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} {}^D R_{ijk}^l &= R_{ijk}^l - \frac{1}{2} \left(\sum_{\delta=1}^n X_m^\delta X_s^\delta \right) R_{ijp}^m R_{.k}^{.ps} + \\ &\frac{1}{4} \left(\sum_{\delta=1}^n X_m^\delta X_s^\delta \right) \left(R_{.i}^{.pm} R_{jpk}^s - R_{.j}^{.pm} R_{ikp}^s \right), \\ {}^D R_{i\alpha jk}^l &= -X_m^\alpha \nabla_j R_{.k}^{.im}, \\ {}^D R_{ij\beta k}^l &= X_m^\beta \nabla_i R_{.k}^{.jm}, \\ {}^D R_{ijk\gamma}^l &= \frac{1}{2} X_m^\gamma (\nabla_i R_{.j}^{.km} - \nabla_j R_{.i}^{.km}), \\ {}^D R_{i\alpha j\beta k}^l &= \delta_\alpha^\beta R_{.k}^{.ji} + \frac{1}{4} X_m^\alpha X_s^\beta \left(R_{.p}^{.im} R_{.k}^{.js} - R_{.p}^{.jm} R_{.k}^{.is} \right), \quad (5.1) \\ {}^D R_{i\alpha jk\gamma}^l &= \frac{1}{2} \delta_\alpha^\gamma R_{.j}^{.ki} + \frac{1}{4} X_m^\alpha X_s^\gamma R_{.p}^{.im} R_{.j}^{.ks}, \\ {}^D R_{ij\beta k\gamma}^l &= -\frac{1}{2} \delta_\beta^\gamma R_{.i}^{.kj} - \frac{1}{4} X_m^\beta X_s^\gamma R_{.p}^{.jm} R_{.i}^{.ks}, \\ {}^D R_{ijk}^{l\sigma} &= \frac{1}{2} X_m^\sigma (\nabla_i R_{jkl}^m - \nabla_j R_{ikl}^m), \\ {}^D R_{i\alpha jk}^{l\sigma} &= \frac{1}{2} \delta_\alpha^\sigma R_{jkl}^i - \frac{1}{4} X_m^\gamma X_s^\alpha R_{jpl}^m R_{.k}^{.is}, \\ {}^D R_{ij\beta k}^{l\sigma} &= \frac{1}{2} \delta_\beta^\sigma R_{ikl}^j + \frac{1}{4} X_m^\gamma X_s^\beta R_{ipl}^m R_{.k}^{.js}, \\ {}^D R_{ijk\gamma}^{l\sigma} &= \delta_\gamma^\sigma R_{jil}^k - \frac{1}{4} X_m^\sigma X_s^\gamma \left(R_{ipl}^m R_{.j}^{.ks} - R_{jpl}^m R_{.i}^{.ks} \right), \\ {}^D R_{i\alpha j\beta k\gamma}^l &= {}^D R_{i\alpha j\beta k}^{l\sigma} = {}^D R_{i\alpha jk\gamma}^{l\sigma} = {}^D R_{ij\beta k\gamma}^{l\sigma} = {}^D R_{i\alpha j\beta k\gamma}^{l\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Пусть ${}^D R_{IJ} = {}^D R_{KIJ}^K$ - компоненты тензорного поля Риччи относительно адаптированного репера $\{D_I\}$, тогда для скалярной кривизны ${}^D r = {}^D g^{IJ} {}^D R_{IJ}$ имеем:

$$\begin{aligned}
& D r = {}^D g^{ij} {}^D R_{ij} + {}^D g^{i\alpha j\beta} {}^D R_{i\alpha j\beta} = g^{ij} \left({}^D R_{kij}^k + {}^D R_{k\gamma ij}^{k\gamma} \right) + \\
& + g_{ij} \delta_{\alpha\beta} {}^D R_{ki\alpha j\beta}^k + g_{ij} \delta_{\alpha\beta} {}^D R_{k\gamma i\alpha j\beta}^{k\gamma} = \\
& g^{ij} \left(R_{kij}^k - \frac{1}{2} \left(\sum_{\delta=1}^n X_m^\alpha X_s^\beta \right) R_{kip}^m R_{.j.}^{ps} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} \left(\sum_{\delta=1}^n X_m^\delta X_s^\delta \right) R_{.i.}^k R_{kjp}^s + \frac{1}{2} \delta_\gamma^\gamma R_{ijk}^k - \frac{1}{4} \left(\sum_{\gamma=1}^n X_m^\gamma X_s^\gamma \right) R_{.j.}^{ps} \right) + \\
& + g_{ij} \delta_{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta R_{.k.}^{ji} - \frac{1}{4} X_m^\alpha X_s^\beta R_{.p.}^{im} R_{.k.}^{js} \right) = \\
& = r - \frac{1}{2} \left(\sum_{\delta=1}^n X_m^\delta X_s^\delta \right) g^{ij} g^{kt} g^{pq} R_{kip}^m R_{tjq}^s - \\
& - \frac{1}{4} \left(\sum_{\delta=1}^n X_m^\delta X_s^\delta \right) g^{ij} g^{kt} g^{pq} R_{iik}^m R_{kjp}^s + + \frac{1}{2} g^{ij} R_{ijk}^k - \\
& - \frac{1}{4} \left(\sum_{\alpha=1}^n X_m^\alpha X_s^\alpha \right) g^{ij} g^{pq} g^{kt} R_{ipk}^m R_{qjt}^s - \frac{1}{2} g_{ij} g^{kt} g^{jq} R_{tkq}^i - \\
& - \frac{1}{4} g_{ij} \left(\sum_{\alpha=1}^n X_m^\alpha X_s^\alpha \right) g^{kt} g^{iq} g^{pl} g^{ja} R_{tpq}^m R_{lka}^s = \\
& r - \frac{1}{2} \left(\sum_{\delta=1}^n X_m^\delta X_s^\delta \right) g^{ij} g^{kt} g^{pq} R_{kip}^m R_{tjq}^s + \\
& + \frac{1}{4} g_{ij} \left(\sum_{\alpha=1}^n X_m^\alpha X_s^\alpha \right) g^{kt} g^{pl} g^{qa} R_{ptq}^m R_{lka}^s = \\
& r - \frac{1}{4} \left(\sum_{\delta=1}^n X_m^\delta X_s^\delta \right) g^{ij} g^{kt} g^{pq} R_{kip}^m R_{tjq}^s = \\
& = r - \frac{1}{4} g^{ij} g^{kt} g^{pq} \sum_{\delta=1}^n (X_m^\delta R_{kip}^m)(X_s^\delta R_{tjq}^s) = \\
& = r - \frac{1}{4} g^{ij} g^{kt} g^{pq} \sum_{\delta=1}^n (X^\delta R)_{kip} (X^\delta R)_{tjq} = r - \frac{1}{4} \sum_{\delta=1}^n \left| X^\delta R \right|^2,
\end{aligned}$$

где $r = g^{ij} R_{ij}$ и $\left| X^\delta R \right|$ определяется в виде

$$\left| X^\delta R \right|^2 = g^{-1} (X^\delta R, X^\delta R) = g^{ij} g^{kt} g^{pq} (X^\delta R)_{kip} (X^\delta R)_{tjq}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. Пусть M - Риманово многообразие с метрикой g , а $F^*(M)$ - его расслоение линейных кореперов с метрикой ${}^D g$. Пусть r и ${}^D r$ - скалярные кривизны g и ${}^D g$, соответственно. Тогда имеет место следующее равенство

$${}^D r = r - \frac{1}{4} \sum_{\delta=1}^n \left| X^\delta R \right|^2.$$

Пусть теперь $(M, g), n > 2$ - Риманово многообразие постоянной кривизны κ , т.е.

$$R_{knj}^s = \kappa (\delta_k^s g_{mj} - \delta_m^s g_{kj})$$

и

$$r = n(n-1)\kappa.$$

Тогда из Теоремы 5.1 получаем:

$$\begin{aligned} {}^S r &= r - \frac{1}{4} \sum_{\delta=1}^n \left| X^\delta R \right|^2 = r - \frac{1}{4} g^{ij} g^{kt} g^{pq} \left(\sum_{\delta=1}^n X_m^\delta X_s^\delta \right) R_{kip}^m R_{tjq}^s = \\ &= r - \frac{1}{4} g^{ij} g^{kt} g^{pq} \sum_{\delta=1}^n \left[X_m^\delta \kappa (\delta_k^m g_{ip} - \delta_i^m g_{kp}) X_s^\delta \kappa (\delta_t^s g_{jq} - \delta_j^s g_{tq}) \right] = \\ &= r - \frac{1}{4} \kappa^2 g^{ij} g^{kt} g^{pq} \sum_{\delta=1}^n \left(X_k^\delta g_{ip} - X_i^\delta g_{kp} \right) \left(X_t^\delta g_{jq} - X_j^\delta g_{tq} \right) = \\ &= r - \frac{1}{4} \kappa^2 g^{ij} g^{kt} g^{pq} \sum_{\delta=1}^n \left(X_k^\delta g_{ip} X_t^\delta g_{jq} - X_k^\delta g_{ip} X_j^\delta g_{tq} - X_i^\delta g_{kp} X_t^\delta g_{jq} + \right. \\ &\quad \left. + X_i^\delta g_{kp} X_j^\delta g_{tq} \right) = r - \frac{1}{4} \kappa^2 g^{ij} g^{kt} g^{pq} \delta_p^j \delta_j^p \sum_{\delta=1}^n X_k^\delta X_t^\delta + \\ &\quad + \frac{1}{4} \kappa^2 g^{ij} g^{kt} g^{pq} \delta_p^j \delta_t^p \sum_{\delta=1}^n X_k^\delta X_j^\delta + \\ &\quad - \frac{1}{4} \kappa^2 g^{ij} g^{kt} g^{pq} \delta_p^t \delta_j^p \sum_{\delta=1}^n X_i^\delta X_t^\delta - \\ &\quad - \frac{1}{4} \kappa^2 g^{ij} g^{kt} g^{pq} \delta_p^t \delta_p^p \sum_{\delta=1}^n X_i^\delta X_j^\delta = r - \frac{1}{4} \kappa^2 \sum_{\delta=1}^n \left| X^\delta \right|^2 n + \\ &\quad + \frac{1}{4} \kappa^2 \sum_{\delta=1}^n \left| X^\delta \right|^2 + \frac{1}{4} \kappa^2 \sum_{\delta=1}^n \left| X^\delta \right|^2 - \frac{1}{4} \kappa^2 \sum_{\delta=1}^n \left| X^\delta \right|^2 n = n(n-1)\kappa - \\ &\quad - \frac{1}{2} \kappa^2 \sum_{\delta=1}^n \left| X^\delta \right|^2 n + \frac{1}{2} \kappa^2 \sum_{\delta=1}^n \left| X^\delta \right|^2 = n(n-1)\kappa - \\ &\quad \frac{1}{2} \kappa^2 \sum_{\delta=1}^n \left| X^\delta \right|^2 (n-1) = \\ &\quad = (n-1)\kappa \left(n - \frac{1}{2} \sum_{\delta=1}^n \left| X^\delta \right|^2 \kappa \right). \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. Пусть $(M, g), n > 2$ - Риманово многообразие постоянной

кривизны κ . Тогда скалярная кривизна ${}^D r$ расслоения линейных кореперов $(F^*(M), {}^D g)$ имеет вид:

$${}^D r = (n-1)\kappa \left(n - \frac{1}{2} \sum_{\delta=1}^n |X^\delta|^2 \kappa \right),$$

где

$$|X^\delta|^2 = g^{ij} X_i^\delta X_j^\delta.$$

5. Скалярная кривизна метрической связности метрики ${}^D g$

В разделах 3 и 4 нами была определена метрика ${}^D g$ на расслоении линейных кореперов $F^*(M)$ и изучена связность Леви-Чивита ${}^D \nabla$ этой метрики. Это единственная связность, которая удовлетворяет условию ${}^S \nabla^S g = 0$ и не имеет кручения. Но существует еще одна связность, которая удовлетворяет условию $\tilde{\nabla}^S g = 0$ и имеет нетривиальный тензор кручения. Мы называем эту связность метрической связностью ${}^S g$.

Горизонтальный лифт произвольной симметричной связности ∇ в расслоение линейных кореперов $F^*(M)$ определяется при помощи соотношений

$$\begin{cases} {}^H \nabla_{H X} {}^H Y = {}^H (\nabla_X Y), & {}^H \nabla_{H X} {}^{V\beta} \omega = {}^{V\beta} (\nabla_X \omega), \\ {}^H \nabla_{V\alpha\theta} {}^H Y = 0, & {}^H \nabla_{V\alpha\theta} {}^{V\beta} \omega = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ и $\omega, \theta \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ [7].

Вводим обозначение ${}^H \nabla_I = {}^H \nabla_{D_I}$. Тогда, принимая во внимание ${}^H \nabla_I D_J = {}^H \Gamma_{IJ}^K D_K$ и записывая ${}^H \Gamma_{IJ}^K$ для разных индексов, из (6.1) получим

$$\begin{cases} {}^H \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k, & {}^H \Gamma_{ij}^{k\gamma} = -\Gamma_{ik}^j \delta_{\beta}^{\gamma}, \\ {}^H \Gamma_{\alpha j}^k = {}^H \Gamma_{ij}^k = {}^H \Gamma_{i\alpha j}^k = {}^H \Gamma_{ij}^{k\gamma} = {}^H \Gamma_{i\alpha j}^{k\gamma} = {}^H \Gamma_{i\alpha j}^k = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Обозначим через T тензор кручения связности ${}^H \nabla$. Тогда T - кососимметричное тензорное поле типа (1,2) на расслоении линейных кореперов $F^*(M)$ линейных кофреймов, определяемое соотношениями

$$T({}^{V\alpha} \omega, {}^{V\beta} \theta) = 0, \quad T({}^H X, {}^{V\beta} \theta) = 0, \quad T({}^H X, {}^H Y) = - \sum_{\beta=1}^n {}^{V\beta} (X \circ R(X, Y))$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ и $\omega, \theta \in \mathfrak{S}_1^0(M)$, где R тензорное поле кривизны связности ∇ . Таким образом, связность ${}^H\nabla$ имеет нетривиальное кручение даже для связности Леви-Чивита ∇_g , определяемой g , если только g не является локально плоским.

Пользуясь (3.1), (3.2), (3.3) и (6.1), для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ и $\omega, \theta, \varepsilon \in \mathfrak{S}_1^0(M)$, получим

$$\begin{aligned}
& \left({}^H\nabla_{V_\alpha\omega} {}^Sg \right) \left(V_\beta\theta, V_\gamma\varepsilon \right) = {}^H\nabla_{V_\alpha\omega} {}^Sg \left(V_\beta\theta, V_\gamma\varepsilon \right) - \\
& {}^Sg \left({}^H\nabla_{V_\alpha\omega} V_\beta\theta, V_\gamma\varepsilon \right) - \\
& - {}^Sg \left(V_\beta\theta, {}^H\nabla_{V_\alpha\omega} V_\gamma\varepsilon \right) = {}^H\nabla_{V_\alpha\omega} \delta^{\beta\gamma V} \left(g^{-1}(\theta, \varepsilon) \right) = \\
& \delta^{\beta\gamma V_\alpha} \omega^V \left(g^{-1}(\theta, \varepsilon) \right) = 0, \\
& \left({}^H\nabla_{HX} {}^Sg \right) \left(V_\beta\theta, V_\gamma\varepsilon \right) = {}^H\nabla_{HX} {}^Sg \left(V_\beta\theta, V_\gamma\varepsilon \right) - \\
& {}^Sg \left({}^H\nabla_{HX} V_\beta\theta, V_\gamma\varepsilon \right) - \\
& - {}^Sg \left(V_\beta\theta, {}^H\nabla_{HX} V_\gamma\varepsilon \right) = {}^H\nabla_{HX} \delta^{\beta\gamma V} \left(g^{-1}(\theta, \varepsilon) \right) - \\
& {}^Sg \left(V_\beta(\nabla_X\theta), V_\gamma\varepsilon \right) - \\
& - {}^Sg \left(V_\beta\theta, V_\gamma(\nabla_X\varepsilon) \right) = \delta^{\beta\gamma H} X^V \left(g^{-1}(\theta, \varepsilon) \right) - \\
& \delta^{\beta\gamma V} \left(g^{-1}(\nabla_X\theta, \varepsilon) \right) - \\
& - \delta^{\beta\gamma V} \left(g^{-1}(\theta, \nabla_X\varepsilon) \right) = \delta^{\beta\gamma V} \left(Xg^{-1}(\theta, \varepsilon) \right) - \\
& \delta^{\beta\gamma V} \left(g^{-1}(\nabla_X\theta, \varepsilon) \right) - \\
& - \delta^{\beta\gamma V} \left(g^{-1}(\theta, \nabla_X\varepsilon) \right) = \delta^{\beta\gamma V} \left(\nabla_X g^{-1}(\theta, \varepsilon) \right) - \delta^{\beta\gamma V} \left(g^{-1}(\nabla_X\theta, \varepsilon) \right) - \\
& - \delta^{\beta\gamma V} \left(g^{-1}(\theta, \nabla_X\varepsilon) \right) = \\
& \delta^{\beta\gamma V} \left(\left(\nabla_X g^{-1} \right) (\theta, \varepsilon) \right), \\
& \left({}^H\nabla_{V_\alpha\omega} {}^Sg \right) \left(V_\beta\theta, {}^HZ \right) = {}^H\nabla_{V_\alpha\omega} {}^Sg \left(V_\beta\theta, {}^HZ \right) - \\
& {}^Sg \left({}^H\nabla_{V_\alpha\omega} V_\beta\theta, {}^HZ \right) - \\
& - {}^Sg \left(V_\beta\theta, {}^H\nabla_{V_\alpha\omega} {}^HZ \right) = 0, \\
& \left({}^H\nabla_{HX} {}^Sg \right) \left(V_\beta\theta, {}^HZ \right) = {}^H\nabla_{HX} {}^Sg \left(V_\beta\theta, {}^HZ \right) - \\
& {}^Sg \left({}^H\nabla_{HX} V_\beta\theta, {}^HZ \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -{}^S g\left({}^{V_\beta}\theta, {}^H \nabla_{{}^H X} {}^H Z\right) = -{}^S g\left({}^{V_\beta}(\nabla_X \theta), {}^H Z\right) - {}^S g\left({}^{V_\beta}\theta, {}^H (\nabla_X Z)\right) = 0, \\
& \left({}^H \nabla_{{}^{V_\alpha}\omega} {}^S g\right)\left({}^H Y, {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) = {}^H \nabla_{{}^{V_\alpha}\omega} {}^S g\left({}^H Y, {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) - \\
& {}^S g\left({}^H \nabla_{{}^{V_\alpha}\omega} {}^H Y, {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) - \\
& -{}^S g\left({}^H Y, {}^H \nabla_{{}^{V_\alpha}\omega} {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) = 0, \\
& \left({}^H \nabla_{{}^H X} {}^S g\right)\left({}^H Y, {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) = {}^H \nabla_{{}^H X} {}^S g\left({}^H Y, {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) - \\
& {}^S g\left({}^H \nabla_{{}^H X} {}^H Y, {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) - \\
& -{}^S g\left({}^H Y, {}^H \nabla_{{}^H X} {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) = -{}^S g\left({}^H (\nabla_X Y), {}^{V_\gamma}\varepsilon\right) - \\
& {}^S g\left({}^H Y, {}^{V_\gamma}(\nabla_X \varepsilon)\right) = 0, \\
& \left({}^H \nabla_{{}^{V_\alpha}\omega} {}^S g\right)\left({}^H Y, {}^H Z\right) = {}^H \nabla_{{}^{V_\alpha}\omega} {}^S g\left({}^H Y, {}^H Z\right) - \\
& {}^S g\left({}^H \nabla_{{}^{V_\alpha}\omega} {}^H Y, {}^H Z\right) - \\
& -{}^S g\left({}^H Y, {}^H \nabla_{{}^{V_\alpha}\omega} {}^H Z\right) = {}^H \nabla_{{}^{V_\alpha}\omega} {}^V (g(Y, Z)) = \\
& {}^{V_\alpha}\omega^V (g(Y, Z)) = 0, \\
& \left({}^H \nabla_{{}^H X} {}^S g\right)\left({}^H Y, {}^H Z\right) = {}^H \nabla_{{}^H X} {}^S g\left({}^H Y, {}^H Z\right) - \\
& {}^S g\left({}^H \nabla_{{}^H X} {}^H Y, {}^H Z\right) - \\
& -{}^S g\left({}^H Y, {}^H \nabla_{{}^H X} {}^H Z\right) = {}^H \nabla_{{}^H X} {}^V (g(Y, Z)) - \\
& {}^S g\left({}^H (\nabla_X Y), {}^H Z\right) - \\
& -{}^S g\left({}^H Y, {}^H (\nabla_X Z)\right) = {}^H X^V (g(Y, Z)) - {}^V (g(\nabla_X Y, Z)) - \\
& -{}^V (g(Y, \nabla_X Z)) = {}^V (Xg(Y, Z)) - {}^V (g(\nabla_X Y, Z)) - \\
& {}^V (g(Y, \nabla_X Z)) = \\
& = {}^V (\nabla_X g(Y, Z)) - {}^V (g(\nabla_X Y, Z)) - {}^V (g(Y, \nabla_X Z)) = \\
& {}^V ((\nabla_X g)(Y, Z)) = 0,
\end{aligned}$$

т.е. горизонтальный лифт ${}^H \nabla$ связности Леви-Чивита ∇_g является метрической связности метрики ${}^D g$.

Пусть ${}^H R$ - тензорное поле кривизны ${}^H \nabla$. По отношению к адаптированному реперу $\{D_I\}$ оно имеет компоненты

$${}^H R_{IJK}^L = 2\left(D_{[I} {}^H \Gamma_{J]K}^L + {}^H \Gamma_{[I|P}^L {}^H \Gamma_{J]K}^P\right) - \Omega_{IJ}^P {}^H \Gamma_{PK}^L.$$

Пользуясь (3.4), (3.5), (3.11), (6.2) и вычислив компоненты тензорного поля Риччи ${}^H R_{IJ} = {}^H R_{LJ}^L$, получим:

$$\begin{cases} {}^H R_{ij} = {}^H R_{Lij}^L = {}^H R_{lij}^l + {}^H R_{l\delta ij}^{l\delta} = R_{lij}^l = R_{ij}, \\ {}^H R_{i\alpha j\beta} = {}^H R_{i\alpha j} = {}^H R_{ij\beta} = 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

где R_{ij} тензорное поле Риччи связности Леви-Чивита ∇_g на M .

При помощи (6.3) и соотношений ${}^D g^{i\alpha j} = {}^D g^{ij\beta} = 0$, для скалярной кривизны связности ${}^H \nabla$ относительно метрики ${}^D g$ имеем

$${}^H r = {}^D g^{IJ} {}^H R_{IJ} = g^{ij} R_{ij} = r,$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6.1. Пусть (M, g) -Риманово многообразии и расслоение линейных кореперов $F^*(M)$ снабжено метрикой ${}^D g$. Тогда расслоение $F^*(M)$ с метрической связностью ${}^H \nabla$ имеет нулевую скалярную кривизну ${}^H r$ относительно метрики ${}^D g$ тогда и только тогда, когда скалярная кривизна r связности ∇_g на M равна нулю.

Отметим, что ${}^H \nabla = {}^D \nabla$ тогда и только тогда, когда (M, g) плоское.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cordero, L.A., Leon, M. On the curvature of the induced Riemannian metric on the frame bundle of a Riemannian manifold // J. Math. pures et appl., 1986, v.65, p. 81-91.
2. Fattayev H.D., Salimov A.A. Diagonal lift of metrics to coframe bundle // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan, 2018, v. 44, № 2, p.328-337.
3. Kowalski O. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of Riemannian manifold // J. reine angew Math., 1971, v. 250, p.124-129.
4. Kowalski O., Sekizawa M. On curvatures of linear frame bundle with naturally lifted metrics // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, 2005, v. 63, № 3, p. 283-296.
5. Mok K.P. On the differential geometry of frame bundles of Riemannian Manifolds // J. reine angew Math., 1978, v.302, p.16-31.
6. Musso E., Tricerri F. Riemannian metrics on tangent bundles // Ann. Mat.Pura Appl., 1988, v. 150 № 4, p. 1-20.
7. Salimov A.A., Fattayev H.D. Connections On The Coframe Bundle // Inter. Elect. J. of Geom., 2019, v. 12, № 1, p. 93-101.
8. Salimov A.A., Gezer A., Akbulut K. Geodesics of Sasakian metrics on the tensor bundles // Mediterr. J. Math., 2009, v. 6, № 2, p. 137-149.
9. Salimov A.A., Filiz A. Some properties of Sasakian metrics in cotangentbundles // Mediterr. J. Math., 2011, v. 8, p. 243-255.
10. Salimov A.A., Fattayev H.D. Coframe bundle and problems of lifts on its cross- sections // Turk J Math., 2018, v. 42, № 4, p. 2035-2044.
11. Salimov A.A., Fattayev H.D. On a new class of lifts in the coframe bundle // Comptes rendus de l'Acad'emie bulgare des Sciences, 2018, v.71, № 6, p. 743-750.
12. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds //

- Tohoku Math. J., 1958, v. 10, p. 338-354.
13. Sato I. Complete lifts from a manifold to its cotangent bundle // Kodai Math. Sem. Rep., 1967, v. 20, p. 458-468.
 14. Tondeur P. Structure presque kahlerienne naturelle sur le fibre des vecteurs covariants d'une variete riemannienne // C.R. Acad. Sci. Paris, 1982, v. 254, p. 407-408.
 15. Yano K., Kobayashi S. Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles, 1. General theory // J. Math. Soc. Japan, 1966, v. 18, №2, p. 194-210.
 16. Yano, K. and Ishihara, S., Tangent and cotangent bundles. New York: Marsel Dekker, Inc., 1973, 423 p.

XƏTTİ KOREPERLƏRİN LAYLANMASINDA RİMAN METRİKASININ DİAQONAL LİFTİNİN ƏYRİLİKLƏRİ

H.FƏTTAYEV

XÜLASƏ

İşdə Riman çoxobrazlısı üzərində xətti koreperlərin laylanmasında Riman metrikanın diaqonal lifti qurulur, bu metrikanın əyrilik xassələri və qeyri-trivial buruqluğa malik metrik rəbitəsi tədqiq olunur.

Açar sözlər: Riman metrikanı, koreperlərin laylanması, adaptə olunmuş reper, diaqonal lift, əyrilik tenzoru, skalyar əyrilik.

CURVATURES OF THE DIAGONAL LIFT OF THE RIEMANNIAN METRIC IN THE BUNDLE OF LINEAR COFRAMES

H.FATTAYEV

SUMMARY

In this paper, we construct a diagonal lift of the Riemannian metric in the bundle of linear coframes over the Riemannian manifold, investigate the properties of curvature and metric connection with nontrivial torsion of this metric.

Keywords: Riemannian metric, bundle of coframes, adapted frame, diagonal lift, curvature tensor, scalar curvature.

УДК 517.95

О ФОРМУЛЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ И ПРИСОЕДИНЕННЫМ ФУНКЦИЯМ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Э.А.ГАСЫМОВ

Бакинский Государственный Университет
qasymov-elmagha@rambler.ru

В работе получаются некоторые формулы разложения по собственным и присоединенным функциям спектральной задачи, соответствующие некоторым смешанным задачам с нерегулярными граничными условиями.

Ключевые слова: формула разложения, спектральная задача, нерегулярное граничное условие.

В настоящей работе получаются некоторые формулы разложения по собственным и присоединенным функциям спектральной задачи, соответствующие некоторым смешанным задачам с нерегулярными граничными условиями.

Пусть

$$g_{m0} \equiv -4 \sum_{k=1}^m \int_0^1 g(\xi) \cos(\lambda_k \xi) d\xi ;$$

$$g_{m1}(x) \equiv 4 \sum_{k=1}^m \left(\int_0^1 g(\xi) \cos(\lambda_k \xi) d\xi \right) \cdot \cos(\lambda_k x) ;$$

$$g_{m2}(x) \equiv 4 \sum_{k=1}^m \left(\int_0^1 g(\xi) \sin(\lambda_k \xi) d\xi \right) \cdot \sin(\lambda_k x), \quad \lambda_k = 2k\pi .$$

- 1⁰. Пусть функция $y = g(x)$ абсолютно интегрируема в отрезке $[0,1]$.
- 2⁰. Пусть функция $y = g(x)$ монотонно, оставаясь ограниченной в промежутках $[0, h]$ и $[1-h, 1]$, где $0 < h < 1$.
- 3⁰. Пусть $g(+0)$, $g(1-0)$ и интегралы

$$\int_0^h \frac{1}{\xi} |g(\xi) - g(+0)| d\xi ,$$

$$\int_0^h \frac{1}{\xi} |g(1-\xi) - g(1-0)| d\xi$$

существуют.

4⁰. Пусть функция $y = g(x)$ монотонно, оставаясь ограниченной в промежутках $[x_0 - h, x_0 + h]$ и $[1 - x_0 - h, 1 + x_0 + h]$, где $0 < x_0 < 1$, $h > 0$.

5⁰. Пусть $g(x_0 \pm 0)$, $g(1 - x_0 \pm 0)$ и интеграл

$$\int_0^h \frac{1}{\xi} |g(x_0 - \xi) - g(x_0 + \xi) + g(1 - x_0 - \xi) + g(1 - x_0 + \xi) - g(x_0 - 0) - g(x_0 + 0) - g(1 - x_0 - 0) + g(1 - x_0 + 0)| d\xi$$

существуют.

6⁰. Пусть $g(x_0 \pm 0)$, $g(1 - x_0 \pm 0)$ и интеграл

$$\int_0^h \frac{1}{\xi} |g(x_0 - \xi) - g(x_0 + \xi) - g(1 - x_0 - \xi) - g(1 - x_0 + \xi) - g(x_0 - 0) - g(x_0 + 0) + g(1 - x_0 - 0) + g(1 - x_0 + 0)| d\xi$$

существуют.

Изложенным способом в [1], легко доказываются

Теорема 1. Пусть выполняются ограничения 1⁰ и или 2⁰, или 3⁰.

Тогда имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_{m0} = -g(+0) - g(1-0) + 2 \int_0^1 g(\xi) d\xi.$$

Теорема 2. Пусть выполняются ограничения 1⁰ и или 4⁰, или 5⁰.

Тогда, при $0 < x_0 < 1$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} g_{m1}(x_0) &= \frac{1}{2} [g(x_0 - 0) + g(x_0 + 0)] + \\ &+ \frac{1}{2} [g(1 - x_0 - 0) + g(1 - x_0 + 0)] - 2 \int_0^1 g(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть выполняются ограничения 1⁰ и или 4⁰, или 6⁰.

Тогда, при $0 < x_0 < 1$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} g_{m1}(x_0) &= \frac{1}{2} [g(x_0 - 0) + g(x_0 + 0)] + \\ &+ \frac{1}{2} [g(1 - x_0 - 0) + g(1 - x_0 + 0)] - 2 \int_0^1 g(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасымов Э.А. Метод конечного интегрального преобразования. Баку: ЭЛМ, 2009, 434 с.

SPEKTRAL MƏSƏLƏNİN MƏXSUSİ VƏ QOŞMA FUNKSIYALARI OLAN FUNKSIYALAR ÜZRƏ AYRILIŞ DÜSTURU HAQQINDA

E.A.QASIMOV

XÜLASƏ

Məqalədə bəzi qeyri-requlyar sərhəd şərtli qarışıq məsələlərə uyğun spektral məsələnin məxsusi və qoşma funksiyaları olan funksiyalar üzrə ayrılış düsturu alınır.

Açar sözlər: ayrılış düsturu, spektral məsələ, qeyri-requlyar sərhəd şərti.

ABOUT OF THE EXPANSION OF AN ARBITRARY FUNCTIONS AND ADJOINT FUNCTIONS OF THE SPECTRAL PROBLEMS

E.A.QASYMOV

SUMMARY

In this paper we get expansion of an arbitrary function in series of the eigen functions and adjoint functions of the spectral problem for irregular mixed problems.

Keywords: the expansion formula, spectral problem, of the irregular boundary conditions.

УДК 517977.56

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБОГО СЛУЧАЯ В ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ТИПА НЕРАВЕНСТВ**С.Т.АЛИЕВА***Бакинский Государственный Университет*
saadata@mail.ru

В работе изучается одна граничная задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами при наличии функциональных ограничений типа неравенств на состояние системы. Доказан аналог дискретного условия максимума. Исследован особый случай, т.е. случай вырождения дискретного принципа максимума.

Ключевые слова: задача оптимального управления, допустимое управление, условие оптимальности, особое управление, дискретный принцип максимума.

Начиная середины 60-х годов XX века внимание многих специалистов начали привлекать многопараметрические, в частности, двухпараметрические дискретные системы управления, которые в приложениях моделируют проблемы фильтрации цифровых массивов данных обработки и визуализации изображений различной природы, возникают в теории клеточных машин и др. (см. например [1-4]).

Все это диктует качественной создание теории экстремальных задач в многопараметрических и в частности, двухпараметрических системах управления. Одним из первых работ посвященной выводу условий оптимальности в дискретных двухпараметрических задачах управления, представляющий собой дискретный аналог системы Гурса-Дарбу, является статья О.В.Васильева и Ф.М.Кирилловой [5]. В [6] были получены различные необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Понтрягина, а в установлен аналог принципа квазимаксима Габасова-Кирилловой.

Разработка теории особых управлений в дискретных двухпараметрических системах представляющие собой дискретный аналог системы Гурса-Дарбу начинается с работ [7, 8] К.Б.Мансимова.

Во всех этих работах предполагалась, что управляющие функции входят в правую часть системы, уравнений. Между тем среди задач опти-

мального управления системами с распределенными параметрами большой интерес вызывает также задачи управления, в которых управляющие функции, являясь сосредоточенными, входят в граничные условия (см. напр. [9]). Такие задачи управления называются граничными задачами управления.

В работах [10-13] получены ряд необходимых условий оптимальности в граничной задаче управления дискретными двухпараметрическими системами без функциональных ограничений на состояние системы.

Исходя из этого, в работе изучается одна граничная задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами при наличии функциональных ограничений типа неравенств на состояние системы. Доказан аналог дискретного условия максимума и исследован случай его вырождения.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о минимуме терминального функционала

$$S_0(u) = \varphi_1^{(0)}(a(x_1)) + \varphi_2^{(0)}(z(t_1, x_1)), \quad (1)$$

при ограничениях

$$u(x) \in U \subset R^r, \quad x \in \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\} = X, \quad (2)$$

$$S_i(u) = \varphi_1^{(i)}(a(x_1)) + \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1)) \leq 0, \quad i = \overline{1, s}, \quad (3)$$

$$z(t+1, x+1) = f(t, x, z(t, x), z(t+1, x), z(t, x+1)),$$

$$(t, x) \in D = T \times X =$$

$$= \{(t, x) : t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1; x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\}, \quad (4)$$

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in X \cup x_1, \quad z(t, x_0) = b(t), \quad t \in T \cup t_1,$$

$$a(x_0) = b(t_0),$$

$$a(x+1) = F(x, a(x), u(x)), \quad x \in X, \quad (5)$$

$$a(x_0) = a_0.$$

Здесь $u(x)$ – r -мерный вектор управляющих функций, U – заданное непустое и ограниченное множество, $\varphi_j^{(i)}$, $i = \overline{0, s}$, $j = 1, 2$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции, $f(t, x, z, l, m)$ ($F(x, a, u)$) заданная n -мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z, l, m) , (a) до второго порядка включительно, $b(t)$ – заданная n -мерная дискретная вектор функция, a_0 – заданный постоянный вектор, Управление $u(x)$ назовем допустимым, если соответствующее ему решение $(a(x), z(t, x))$ системы (4)-(5) удовлетворяет ограничениям (3).

В работах [10-13] изучена задача типа (1)-(5) без функциональных ограничений и при определенных предположениях доказано необходимое условие оптимальности первого порядка в форме дискретного условия максимума. Предлагаемая работа посвящена доказательству аналога дискретного условия максимума и исследовано особого случая.

Необходимое условие оптимальности. Типа дискретного принципа максимума. Считая $(u(x), a(x), z(t, x))$ - фиксированным допустимым процессом, и $v(x)$ произвольным процессом.

Введем обозначения

$$H(t, x, z, l, m) = \psi_i \cdot f(t, x, z, l, m),$$

$$M(x, a, u, p_i) = p_i' F(x, a, u),$$

$$\Delta_v M^{(i)}[x] \equiv p_i' \Delta_v F[x],$$

$$J(u) = \{0\} \cup I(u), \quad I(u) = \{i : S_i(u(x) = 0, i = \overline{1, s})\},$$

$$H^{(i)}_z[t, x] \equiv \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial z} \equiv \frac{\partial H(t, x, z(t, x), z(t+1, x), z(t, x+1), \psi_i(t, x))}{\partial z},$$

$$H^{(i)}_l[t, x] \equiv \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial l} \equiv \frac{\partial H(t, x, z(t, x), z(t+1, x), z(t, x+1), \psi_i(t, x))}{\partial l},$$

$$H^{(i)}_m[t, x] \equiv \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial m} \equiv \frac{\partial H(t, x, z(t, x), z(t+1, x), z(t, x+1), \psi_i(t, x))}{\partial m},$$

$$M_a^{(i)}[x] \equiv \frac{\partial M^{(i)}[x]}{\partial a} \equiv \frac{\partial M(x, a(x), u(x), p_i(x))}{\partial a},$$

$$\Delta_v M^{(i)}_a[x] \equiv \frac{\Delta_v \partial M^{(i)}[x]}{\partial a} \equiv \frac{\partial M(x, a(x), v, p_i(x))}{\partial a} - \frac{\partial M(x, a(x), u(x), p_i(x))}{\partial a},$$

Здесь $\psi_i(t, x)$ и $p_i(x)$ являются соответственно решениями следующих задач

$$\psi_i(t-1, x-1) = \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial z} + \frac{\partial H^{(i)}[t-1, x]}{\partial l} + \frac{\partial H^{(i)}[t, x-1]}{\partial m},$$

$$\psi_i(t_1-1, x-1) = \frac{\partial H^{(i)}[t_1-1, x]}{\partial l},$$

$$\psi_i(t-1, x_1-1) = \frac{\partial H^{(i)}[t, x_1-1]}{\partial m},$$

$$\psi_i(t_1-1, x_1-1) = -\frac{\partial \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z}; \quad (6)$$

$$p_i(x-1) = \frac{\partial M^{(i)}[x]}{\partial a} + \psi_i(t_0-1, x-1) - \frac{\partial H^{(i)}[t_0, x]}{\partial l},$$

$$p_i(x_1 - 1) = -\frac{\partial \varphi_1^{(i)}(a(x_1))}{\partial a} + \psi_i(t_0 - 1, x_1 - 1). \quad (7)$$

Допустим, что множество

$$F(x, a(x), U) = \{\beta : \beta = F(x, a(x), v), v \in U\}, \quad (8)$$

выпукло.

Пусть $\varepsilon \in [0, 1]$ произвольный число, а $v(x) \in U, x \in X$ как отмечено в выше произвольный вектор управляющих воздействий.

Через $(a(x; \varepsilon), z(t, x; \varepsilon))$ - обозначим решение следующей возмущенной системы

$$\begin{aligned} z(t+1, x+1; \varepsilon) &= f(t, x, z(t, x; \varepsilon), z(t+1, x; \varepsilon), z(t, x+1; \varepsilon)), \\ z(t_0, x; \varepsilon) &= a(x; \varepsilon), x \in X \cup x_1, \end{aligned} \quad (9)$$

$$z(t, x_0; \varepsilon) = b(t), t \in T \cup t_1,$$

$$a(x_0; \varepsilon) = b(t_0),$$

$$\begin{aligned} a(x+1; \varepsilon) &= F(x, a(x; \varepsilon), u(x; \varepsilon)) \equiv F(x, a(x; \varepsilon), u(x)) + \\ &+ \varepsilon [F(x, a(x; \varepsilon), v(x)) - F(x, a(x; \varepsilon), u(x))] \quad \rfloor \end{aligned} \quad (10)$$

$$a(x_0; \varepsilon) = a_0.$$

положим по определению

$$y(t, x) = \frac{\partial z(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad \alpha(x) = \frac{\partial a(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}.$$

$y(t, x)$ и $\alpha(x)$ являются соответственно решениями следующих задач, соответствующие допустимому процессу $(u(x), a(x), z(t, x))$

$$y(t+1, x+1) = f_z[t, x]y(t, x) + f_l[t, x]y(t+1, x) + f_m[t, x]y(t, x+1), \quad (11)$$

$$y(t_0, x) = \alpha(x), \quad x \in X \cup x_1,$$

$$y(t, x_0) = 0, \quad t \in T \cup t_1,$$

$$\alpha(x+1) = F_a[x]\alpha(x) + \Delta_{v(x)}F[x], \quad x \in X, \quad (12)$$

$$\alpha(x_0) = 0.$$

Перейдем к вычислению приращения функционала $S_i(u)$, соответствующее специальному приращению $\Delta u(x; \varepsilon) = u(x; \varepsilon) - u(x)$ управления $u(x)$

При помощи формулы Тейлора получим

$$S_i(u(x; \varepsilon)) - S_i(u(x)) = [\varphi_1^{(i)}(a(x_1; \varepsilon)) - \varphi_1^{(i)}(a(x_1))] +$$

$$\begin{aligned} [\varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1; \varepsilon)) - \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))] = \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi_1^{(i)'}(a(x_1))}{\partial a} \alpha(x_1) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \varphi_2^{(i)'}(z(t_1, x_1))}{\partial z} y(t_1, x_1) \right] + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (13)$$

Принимая во внимание (11), (12) формулу приращения (13) можно привести к виду

$$S_i(u(x; \varepsilon)) - S_i(u(x)) = \varepsilon \left[\frac{-\partial \varphi_1^{(i)'}(a(x_1))}{\partial a} \alpha(x_1) + \frac{\partial \varphi_2^{(i)'}(z(t_1, x_1))}{\partial z} y(t_1, x_1) + \right.$$

$$\begin{aligned} \left. \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p_i'(x) \alpha(x+1) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\frac{\partial M^{(i)}[x]}{\partial a} \alpha(x) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\psi_i'(t, x) y(t+1, x+1) - \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial z} y(t, x) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial l} y(t+1, x) - \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial m} y(t, x+1) \right] \right] + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (14)$$

Из тождеств

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(x) \alpha(x+1) = p'(x_1-1) \alpha(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(x-1) \alpha(x), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t, x) y(t+1, x+1) = \sum_{t=t_0+1}^{t_1-1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1-1} \psi'(t-1, x-1) y(t, x) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t-1, x-1) y(t, x) + \\ + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1, x_1-1) y(t, x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t_1-1, x-1) y(t_1, x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t_0-1, x-1) y(t_0, x) + \\ + \psi'(t_1-1, x_1-1) y(t_1, x_1) - \psi'(t_0-1, x_1-1) y(t_0, x_1), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_l'[t, x] y(t+1, x) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_l[t-1, x] y(t, x) + \\ + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_l[t_1-1, x] y(t_1, x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_l[t_0-1, x] y(t_0, x), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_m[t, x] y(t, x+1) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_m[t, x-1] y(t, x) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_m[t, x_1-1] y(t, x_1). \end{aligned} \quad (18)$$

Ясно, что

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p_i'(x) \alpha(x+1) = p_i'(x_1-1) \alpha(x_1) + \sum_{x=x_1}^{x_1-1} p_i'(x-1) \alpha(x), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i'(t, x) y(t+1, x+1) = \\ &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i'(t-1, x-1) y(t, x) + \sum_{t=t_1}^{t_1-1} \psi_i'(t-1, x_1-1) y(t, x_1) + \\ &+ \sum_{x=x_1}^{x_1-1} \psi_i'(t_1-1, x-1) y(t_1, x) - \sum_{x=x_1}^{x_1-1} \psi_i'(t_0-1, x-1) y(t_0, x) + \\ &+ \psi_i'(t_1-1, x_1-1) y(t_1, x) - \psi_i'(t_0-1, x_1-1) y(t_0, x), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial l} y(t+1, x) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial l} y(t, x) + \\ &+ \sum_{x=x_1}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t_1-1, x]}{\partial l} y(t_1, x) - \sum_{x=x_1}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t_0-1, x]}{\partial l} y(t_0, x), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial m} y(t, x+1) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t, x-1]}{\partial m} y(t, x) + \\ &+ \sum_{t=t_1}^{t_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t, x_1-1]}{\partial m} y(t, x_1), \end{aligned}$$

С учетом тождеств (19)-(21) из формулы приращения (14) получим

$$\begin{aligned} S_i(u(x; \varepsilon)) - S_i(u(x)) &= \varepsilon \left[\frac{-\partial \varphi_1^{(i)}(a(x_1))}{\partial a} \alpha(x_1) + \frac{\partial \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z} y(t_1, x_1) + \right. \\ &+ p_i'(x_1-1) \alpha(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [p_i'(x-1) \alpha(x) - \frac{\partial M^{(i)}[x]}{\partial a} \alpha(x)] - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M^{(i)}[x] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i'(t-1, x-1) y(t, x) + \sum_{t=t_1}^{t_1-1} \psi_i'(t-1, x_1-1) y(t, x_1) + \\
& + \sum_{x=x_1}^{x_1-1} \psi_i'(t_1-1, x-1) y(t_1, x) - \sum_{x=x_1}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t_0-1, x]}{\partial l} y(t_0, x) - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t, x-1]}{\partial m} y(t, x) + \sum_{t=t_1}^{t_1-1} \frac{\partial H^{(i)}[t, x_1-1]}{\partial m} y(t, x_1).
\end{aligned} \tag{22}$$

Из разложения (22), с учетом того факта, что $\psi_i(t, x), p_i(x)$ являются соответственно решениями задач (6), (7), получим

$$S_i(u(x; \varepsilon)) - S_i(u(x)) = -\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M^{(i)}[x] + o(\varepsilon), \quad i = \overline{0, s}. \tag{23}$$

При помощи разложений (23) доказывается

Теорема 1. При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления $u(x)$ в задаче (1)-(5) необходимо, чтобы неравенство

$$\min_{i \in J(u)} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M^{(i)}[x] \leq 0, \tag{24}$$

выполнялось для всех $v(x) \in U, x \in X$.

Необходимые условия оптимальности особых управлений.

Перейдем к исследованию особого случая, т.е. случая вырождения необходимого условия оптимальности (24).

Следуя [14] введем.

Определение 1. Допустимое управление $v(x)$ назовем критическим относительно экстремали Понтрягина $u(x)$, если

$$\min_{i \in J(u)} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M^{(i)}[x] = 0. \tag{25}$$

Определение 2. Экстремаль Понтрягина $u(x)$ назовем особой в смысле принципа максимума Понтрягина в задаче (1)-(5) если существует соответствующее ей критическое допустимое управление $v(x) \neq u(x)$.

В дальнейшем через $J_1(u)$ будем обозначать максимальное подмножество индексов из $J(u)$ такое, что

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M^{(i)}[x] = 0, \quad i \in J_1(u).$$

для всех допустимых управлений, критических относительно $u(x)$.

Перейдем к выводу необходимых условий оптимальности особых управлений.

Допустим, что в задаче (1)-(5)

$$f(t, x, z, l, m) = A(t, x)m + f_1(t, x, z, l). \quad (26)$$

Здесь $A(t, x)$ - заданная $n \times n$ -матричная функция, $f(t, x, z, l)$ заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z, l) до второго порядка включительно.

Пусть $\Phi(x, s)$ - ($n \times n$) матричная функция, являющаяся решением задачи

$$\Phi(x, s - 1) = \Phi(x, s)F_a[s], \quad \Phi(x, x - 1) = E.$$

Положим

$$Q(t, x, s) = \sum_{\tau=s+1}^{x-1} [R(t, x : t_0 - 1, \tau - 1) - R(t, x : t_0 - 1, \tau)] f_l[t_0 - 1, \tau] \Phi(\tau, s) + \\ + R(t, x : t_0 - 1, x - 1) \Phi(x, s),$$

Здесь $R(t, x; \tau, s)$ ($n \times n$) матричная функция, являющаяся решением задачи

$$R(t, x; \tau - 1, s - 1) = R(t, x; \tau, s) f_z[\tau, s] + R(t, x; \tau - 1, s) f_l[\tau - 1, s] + R(t, x; \tau, s - 1) f_m[\tau, s - 1],$$

$$R(t, x; \tau - 1, x - 1) = R(t, x; \tau, x - 1) f_m[\tau, x - 1],$$

$$R(t, x; t - 1, s - 1) = R(t, x; t - 1, s) f_l[t - 1, s],$$

$$R(t, x; t - 1, x - 1) = E.$$

и введем обозначение

$$L_i(\tau, s) = -\Phi'(x_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1^{(i)}(a(x_1))}{\partial a^2} \Phi(x_1, s) - Q'(t_1, x_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z^2} Q(t_1, x_1, s) + \\ + \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} [\Phi'(x, \tau) \frac{\partial^2 M^{(i)}[x]}{\partial a^2} \Phi(x, s) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [Q'(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H^{(i)}[t, x]}{\partial z^2} Q(t, x, s) + \\ Q'(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H^{(i)}[t, x]}{\partial z \partial l} Q(t+1, x, s) + Q'(t+1, x, \tau) \frac{\partial^2 H^{(i)}[t, x]}{\partial l \partial z} Q(t, x, s) +$$

$$+ Q'(t+1, x, \tau) \frac{\partial^2 H^{(i)}[t, x]}{\partial t^2} Q(t+1, x, s) \text{]} \quad (27)$$

Справедлива.

Теорема 2. Если множество (8) выпукло, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума, управления $u(x)$ в задаче (1)-(5), (26) необходимо, чтобы неравенство

$$\min_{i \in J_1(u)} \left[\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(\tau)} F'[\tau] L_i(\tau, s) \Delta_v F[s] + \right. \\ \left. + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M_a^{(i)}[x] \Phi(x, s) \Delta_{v(s)} F[s] \right] \right] \leq 0, \quad (28)$$

выполнялось для всех критических относительно $u(x)$, $x \in X$ допустимых управлений $v(x)$, $x \in X$.

Доказательство теоремы 2 проведем в два этапа. Сначала докажем, что соотношение (24) имеет место для таких критических допустимых управлений $v(x)$, для которых

$$\min_{i \in J(u) \setminus J_1(u)} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M^{(i)}[x] \leq 0. \quad (29)$$

Допустим обратное. Пусть существует критическое допустимое управление $\bar{v}(x)$, $x \in X$, такое что

$$\min_{i \in J(u) \setminus J_1(u)} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M^{(i)}[x] > 0. \quad (30)$$

но при этом

$$\min_{i \in J_1(u)} \left[\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(\tau)} F'[\tau] L_i(\tau, s) \Delta_{\bar{v}} F[s] + \right. \\ \left. + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M_a^{(i)}[x] \Phi(x, s) \Delta_{\bar{v}} F[s] \right] \right] > 0. \quad (31)$$

По определено

$$\bar{y}(t, x) = \frac{\partial z(t, x : \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}; \quad \bar{Y}(t, x) = \frac{\partial^2 z(t, x : \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0}, \\ \bar{\alpha}(x) = \frac{\partial a(x : \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}; \quad \bar{V}(t, x) = \frac{\partial^2 a(x : \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (32)$$

Из введенных обозначений сразу следует что $\bar{y}(t, x), \bar{Y}(t, x), \bar{\alpha}(x), \bar{V}(x)$ являются соответственно решениями следующих задач

$$\bar{y}(t+1, x+1) = f_z[t, x] \bar{y}(t, x) + f_l[t, x] \bar{y}(t+1, x) + f_m[t, x] \bar{y}(t, x+1), \\ \bar{y}(t_0, x) = \bar{\alpha}(x), \quad x \in X \cup x_1, \quad (33)$$

$$\bar{y}(t, x_0) = 0, \quad t \in T \cup t_1,$$

$$\bar{Y}(t+1, x+1) = f_z[t, x]\bar{Y}(t, x) + f_l[t, x]\bar{Y}(t+1, x) + f_m[t, x]\bar{Y}(t, x+1) +$$

$$+ \bar{y}'(t, x)f_{zz}[t, x]\bar{y}(t, x) + \bar{y}'(t, x)f_{zl}[t, x]\bar{y}(t+1, x) + \bar{y}'(t+1, x)f_{lz}[t, x]\bar{y}(t, x) + \\ + \bar{y}'(t+1, x)f_{ll}[t, x]\bar{y}(t+1, x), \quad (34)$$

$$\bar{Y}(t_0, x) = \bar{V}(x) \quad x \in X \cup x_1; \quad \bar{Y}(t, x_0) = 0, \quad t \in T \cup t_1$$

$$\bar{\alpha}(x+1) = F_a[x]\bar{\alpha}(x) + \Delta_{\bar{v}(x)}F[x], \quad x \in X, \quad \bar{\alpha}(x_0) = 0. \quad (35)$$

$$\bar{V}(x+1) = F_a[x]\bar{V}(x) + 2\Delta_{\bar{v}(x)}F_a[x]\bar{\alpha}(x) + \bar{\alpha}'(x)F_{aa}[x]\bar{\alpha}(x),$$

$$\bar{V}(x_0) = 0. \quad (36)$$

Далее, используя формулу Тейлора и учитывая (13), получаем,

что

$$S_i(\bar{u}(x : \varepsilon)) - S_i(u(x)) = \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi_1^{(i)'}}{\partial a}(a_1(x_1)) \bar{\alpha}(x_1) + \frac{\partial \varphi_2^{(i)'}}{\partial z}(z(t_1, x_1)) \bar{y}(t_1, x_1) \right] +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\bar{\alpha}'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1^{(i)'}}{\partial a^2}(\bar{a}_1(x_1)) \bar{\alpha}(x_1) + \frac{\partial \varphi_1^{(i)'}}{\partial a}(a_1(x_1)) \bar{V}(x_1) + \right.$$

$$\left. + \bar{y}'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2^{(i)'}}{\partial z^2}(z(t_1, x_1)) \bar{y}(t_1, x_1) + \frac{\partial \varphi_2^{(i)'}}{\partial z}(z(t_1, x_1)) \bar{Y}(t_1, x_1) \right] + o(\varepsilon^2), \quad (37)$$

Допустим, что $i \in J(u) \setminus J_1(u)$.

В этом случае, принимая во внимание (30), из (37) получаем, что

$$S_i(\bar{u}(x : \varepsilon)) - S_i(u(x)) - \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M^{(i)}[x] < 0. \quad (38)$$

Пусть теперь $i \in J_1(u)$. Тогда, используя (14)-(15) из (16) получаем,

$$S_i(\bar{u}(x : \varepsilon)) - S_i(u(x)) = \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi_1^{(i)'}}{\partial a}(a_1(x_1)) \bar{\alpha}(x_1) + \frac{\partial \varphi_2^{(i)'}}{\partial z}(z(t_1, x_1)) \bar{y}(t_1, x_1) \right] +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\bar{\alpha}'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1^{(i)'}}{\partial a^2}(a_1(x_1)) \bar{\alpha}(x_1) + \frac{\partial \varphi_1^{(i)'}}{\partial a}(a_1(x_1)) \bar{V}(x_1) + \right.$$

$$\left. + \bar{y}'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2^{(i)'}}{\partial z^2}(z(t_1, x_1)) \bar{y}(t_1, x_1) \right]$$

$$+ \frac{\partial \varphi_2^{(i)'}}{\partial z}(z(t_1, x_1)) \bar{Y}(t_1, x_1) \left. \right] + \varepsilon \left[\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p_i'(x) \bar{\alpha}(x+1) - M_a^{(i)}[x] + \bar{\alpha}(x) \Delta_{\bar{v}(x)} M^{(i)}[x] \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\psi'(t, x) \bar{y}(t+1, x+1) - H_z^{(i)}[t, x] \bar{y}(t, x) + H_l^{(i)}[t, x] \bar{y}(t+1, x) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + H_m^{(i)}[t, x] \bar{y}(t, x+1) \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[p_i'(x) \bar{V}(x+1) - M_a^{(i)}[x] \bar{V}(x) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2\Delta_{\bar{v}(x)} M_a^{(i)}[x] \bar{\alpha}(x) + \bar{\alpha}'(x) M_{aa}^{(i)}[x] \bar{\alpha}(x) \right] \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\sum_{t=t_0, x=x_0}^{t_1, x_1-1} \psi_i'(t, x) \bar{Y}(t+1, x+1) - \right. \\
& \quad \left. - \left[H_z^{(i)}[t, x] \bar{Y}(t, x) + H_l^{(i)}[t, x] \bar{Y}(t+1, x) + H_m^{(i)}[t, x] \bar{Y}(t, x+1) + \bar{y}'(t, x) H_{zz}[t, x] \bar{y}(t, x) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \bar{y}'(t, x) H_{zl}[t, x] \bar{y}(t+1, x) + \bar{y}'(t+1, x) H_{lz}[t, x] \bar{y}(t, x) + \bar{y}'(t+1, x) H_{ll}[t, x] \bar{y}(t+1, x) \right] \right] + o(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

где $\psi_i(t, x)$, $p_i(x)$ являются решениями сопряженной системы

$$\begin{aligned}
\psi_i(t-1, x-1) &= \frac{\partial H^{(i)}[t, x]}{\partial z} + \frac{\partial H^{(i)}[t-1, x]}{\partial l} + \frac{\partial H^{(i)}[t, x-1]}{\partial m}, \\
\psi_i(t_1-1, x-1) &= \frac{\partial H^{(i)}[t_1-1, x]}{\partial l}, \\
\psi_i(t-1, x_1-1) &= \frac{\partial H^{(i)}[t, x_1-1]}{\partial m}, \\
\psi_i(t_1-1, x_1-1) &= -\frac{\partial \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z};
\end{aligned}$$

$$p_i(x-1) = \frac{\partial M^{(i)}[x]}{\partial a} + \psi_i(t_0-1, x-1) - \frac{\partial H^{(i)}[t_0, x]}{\partial l},$$

$$p_i(x_1-1) = -\frac{\partial \varphi_1^{(i)}(a(x_1))}{\partial a} + \psi_i(t_0-1, x_1-1).$$

Отсюда после некоторых преобразований, получим

$$\begin{aligned}
& S_i(\bar{u}(x: \varepsilon)) - S_i(u(x)) = \\
& = \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\bar{\alpha}'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1^{(i)}(a(x_1))}{\partial a^2} \bar{\alpha}(x_1) + \bar{y}'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z^2} \bar{y}(t_1, x_1) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\bar{\alpha}'(x) M_{aa}^{(i)}[x] \bar{\alpha}(x) + 2\Delta_{\bar{v}(x)} M_a^{(i)'}[x] \bar{\alpha}(x) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\bar{y}'(t, x) H_{zz}[t, x] \bar{y}(t, x) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \bar{y}'(t, x) H_{zl}[t, x] \bar{y}(t+1, x) + \bar{y}'(t+1, x) H_{lz}[t, x] \bar{y}(t, x) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \bar{y}'(t+1, x) H_{ll}[t, x] \bar{y}(t+1, x) + o(\varepsilon^2) \right] \right. \tag{39}
\end{aligned}$$

С другой стороны, решения задач (33) и (35) допускают представления

$$\bar{y}(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t, x, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s], \quad (40)$$

$$\bar{\alpha}(x) = \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Phi(x, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s], \quad (41)$$

где $Q(t, x, s)$ определяется по формуле

$$Q(t, x, s) = \sum_{\tau=s+1}^{x-1} [R(t, x : t_0 - 1, \tau - 1) - R(t, x : t_0 - 1, \tau)] f_l[t_0 - 1, \tau] \Phi(\tau, s) + R(t, x : t_0 - 1, x - 1) \Phi(x, s),$$

а $\Phi(x, s) - (n \times n)$ матричная функция, являющаяся решением задачи

$$\Phi(x, s - 1) = \Phi(x, s) F_a[s], \quad \Phi(x, x - 1) = E.$$

При помощи представлений (40), (41) получаем, что

$$\begin{aligned} & \bar{\alpha}'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1^{(i)}(a(x_1))}{\partial a^2} \bar{\alpha}(x_1) = \\ & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(\tau)} F'[\tau] \Phi'(x_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1^{(i)}(a(x_1))}{\partial a^2} \Phi(x_1, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s] \rfloor \\ & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M_a^{(i)'} [x] \bar{\alpha}(x) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x_0}^{x-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M_a^{(i)'} [x] \Phi(x, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s] \rfloor \right. \\ & \bar{y}'(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z^2} \bar{y}(t_1, x_1) = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(\tau)} F'[\tau] Q'(t_1, x_1, \tau) \times \\ & \times \frac{\partial^2 \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))}{\partial z^2} Q(t_1, x_1, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s] \rfloor \\ & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \bar{\alpha}(x) M_{aa} [x] \bar{\alpha}(x) = \\ & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(\tau)} F'[\tau] \left[\sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} \Phi'(x, \tau) M_{aa}^{(i)} [x] \Phi(x, s) \right] \Delta_{\bar{v}(s)} F[s] \rfloor \\ & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [y'(t, x) H_{zz}[t, x] y(t, x) + y'(t, x) H_{zl}[t, x] y(t+1, x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + y'(t+1, x)H_{l_z}[t, x]y(t, x) \\
& + y'(t+1, x)H_{ll}[t, x]y(t+1, x)] = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(\tau)} F[\tau] \times \\
& \times \left\{ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} [Q'(t, x, \tau)H_{zz}^{(i)}[t, x]Q(t, x, s) + \right. \\
& + Q'(t, x, \tau)H_{zl}^{(i)}[t, x]Q(t+1, x, s) + Q'(t+1, x, \tau)H_{lz}^{(i)}[t, x]Q(t, x, s) + \\
& \left. + Q'(t+1, x, \tau)H_{ll}^{(i)}[t, x]Q(t+1, x, s) \right] \Delta_{v(s)} F[s].
\end{aligned}$$

При помощи этих тождеств с учетом (27), При помощи формулы Тейлора получим

$$\begin{aligned}
S_i(u(x; \varepsilon)) - S_i(u(x)) &= [\varphi_1^{(i)}(a(x_1; \varepsilon)) - \varphi_1^{(i)}(a(x_1))] + \\
[\varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1; \varepsilon)) - \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1))] &= \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi_1^{(i)}}{\partial a}(a(x_1)) \alpha(x_1) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \varphi_2^{(i)}}{\partial z}(z(t_1, x_1)) y(t_1, x_1) \right] + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

разложение (34) при $i \in J_1(u)$ представляется в виде

$$\begin{aligned}
S_i(\bar{u}(x; \varepsilon)) - S_i(u(x)) &= -\frac{\varepsilon^2}{2} [\Delta_{\bar{v}(\tau)} F[\tau] L_i(\tau, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s] + \\
& + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x_0}^{x-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M_a^{(i)}[x] \Phi(x, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s] \right]] + o(\varepsilon^2) \quad (42)
\end{aligned}$$

Поэтому, принимая во внимания (29), (30), получаем, что при $i \in \{\bar{1}, \bar{s}\} \setminus J(u)$

$$\begin{aligned}
S_i(\bar{u}(x; \varepsilon)) &= S_i(u(x)) - \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M^{(i)}[x] + o(\varepsilon) = \varphi_1^{(i)}(a(x_1)) + \varphi_2^{(i)}(z(t_1, x_1)) - \\
& - \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M^{(i)}[x] + o(\varepsilon) < 0.
\end{aligned}$$

Если же $i \in J(u) \setminus J_1(u)$ то

$$S_i(\bar{u}(x; \varepsilon)) = -\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M^{(i)}[x] + o(\varepsilon) < 0.$$

А при $i \in J_1(u)$ получаем, что

$$S_i(\bar{u}(x; \varepsilon)) - S_i(u(x)) = -\frac{\varepsilon^2}{2} \left[\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(\tau)} F[\tau] L_i(\tau, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s] + \right. \\ \left. + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x_0}^{x-1} \Delta_{\bar{v}(x)} \frac{\partial M^{(i)}[x]}{\partial a} \Phi(x, s) \Delta_{\bar{v}(s)} F[s] \right] + o(\varepsilon^2) \right] < 0.$$

Полученные соотношения показывают, что при достаточно малых ε – справедливы неравенства

$$S_i(\bar{u}(x; \varepsilon)) < 0, \quad i = \overline{1, s}; \quad S_0(\bar{u}(x; \varepsilon)), S_0(u(x)).$$

которые противоречат оптимальности управления $u(x)$.

Перейдем к исследованию общего случая, считая что $v(x), x \in X$ – произвольное критическое допустимое управление.

Если предполагать, что $v_1(x), x \in X$ – критическое допустимое управление, удовлетворяющее (10), то в силу выпуклости множества

$$F(x, a(x), U) = \{ \beta : \beta = F(x, a(x), v), v \in U \},$$

для малого $\mu \in [0, 1]$ можно найти допустимое управление $u_\mu(x), x \in X$ – которое является критическим относительно $u(x), x \in X$, и удовлетворяет условию (2), а также соотношению

$$\Delta_{u_\mu(x)} F[x] = \mu \Delta_{v_1(x)} F[x] + (1 - \mu) \Delta_{v(x)} F[x].$$

Следовательно, при любом $\mu \in [0, 1]$ имеет место неравенство:

$$\min_{i \in J_1(u)} \left[\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \mu \Delta_{v_1(\tau)} F'[\tau] + (1 - \mu) \Delta_{v(\tau)} F'[\tau] \right] L_i(\tau, s) \left[\mu \Delta_{v_1(s)} F[s] + (1 - \mu) \Delta_{v(s)} F[s] \right] + \\ + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\mu \Delta_{v_1(x)} M_a^{(i)}[x] + (1 - \mu) \Delta_{v(x)} M^{(i)}[x] \right] \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Phi(x, s) \times \\ \times \left[\mu \Delta_{v_1(s)} F[s] + (1 - \mu) \Delta_{v(s)} F[s] \right] \leq 0.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\mu \rightarrow 0$, приходим к неравенству (8)

Теорема доказана.

Непосредственным следствием теоремы 2. является следующее утверждение.

Теорема 3. При выполнении условий теоремы 1. для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $u(x)$ в задаче (1)-(5), (26) необходимо, чтобы неравенство

$$\min_{i \in J_1(u)} \left\{ \Delta_v F[\xi] L_i(\xi, \xi) \Delta_v F[\xi] \right\} \leq 0 \quad (43)$$

выполнялось для всех $v \in U$ и $\xi \in X$.

Для доказательства теоремы 2 достаточно в (9) $v(x)$ определить по формуле

$$v(x) = \begin{cases} v, & x = \xi \in X, \\ u(x), & x \neq \xi \in X. \end{cases}$$

Здесь $\xi \in X$ – произвольная точка, а $v \in U$ – произвольный вектор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уилски А.С. Взаимосвязь между теорией цифровой обработки сигналов и теорией управления и оценивания // ТИИЭР, 1978, т.66, №9, с. 5-33.
2. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1989, 376 с.
3. Fornazini E., Marchesini G. State-space realization theory of two-dimensional filters // IEEE Trans Automat. Control 1976, vol. AC-21, №4, pp. 484-492
4. Kaczorek T. Two-dimensional linear systems. Berlin, 1985.
5. Васильев О.В., Кириллова Ф.М. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах // ДАН СССР, 1967, т. 175, №2 с.
6. Васильев О.В. К оптимальным процессам в непрерывных и дискретных двухпараметрических системах // Информ. сб. трудов ВЦ Ир. ГУ. Иркутск, 1968, вып.2, с. 87-104.
7. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка в дискретных двухпараметрических системах // Изв АН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук, 1998, №2, с. 56
8. Мансимов К.Б. Оптимизация одного класса дискретных двухпараметрических систем // Дифференц. уравнения, 1991, № 2, с. 359-362.
9. Васильев О.В. Об одной задаче оптимального управления процессом с распределенными параметрами и управляемыми граничными условиями // В. сб. Дифференц. и интег. уравнения. Иркутск, ИГУ, 1976, вып.4, с.82-110.
10. Алиева С.Т. Дискретный аналог метода разделения множителя Лагранжа на слагаемые // Научные Известия СГУ. 2004, № 2, с. 28-33.
11. Алиева С.Т. Об оптимальности особых граничных управлений в двухпараметрических системах // Докл. НАН Азербайджана, 2004, т. с.
12. Алиева С.Т., Мансимов К.Б. Об одной дискретной двухпараметрической задаче управления с граничным условием. // Вестник БГУ. сер. физ.-мат. наук, 2004, № 4, с.13-19.
13. Алиева С.Т. Квазиособые управления в одной граничной задаче управления // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 2004, № 3, с.71-76
14. Гороховик С.Я. Необходимые условия оптимальности особых управлений в дискретных системах с терминальными ограничениями. Изв. АН. БССР. сер.физ.-мат наук, 1985, №3, с. 48-51.
15. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 432 с.
16. Ащепков Л.Т., Габасов Р. К оптимизации дискретных систем // Дифференц. уравнения, 1972, №6, с. 1068-1080
17. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1972, 446 с.
18. Гайшун И.В., Горячкин В.В. Условие разрешимости и управляемость линейных двухпараметрических дискретных систем // Дифференц. уравнения. 1988, т.24, № 12, с. 2047-2051
19. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем, I, II, III. //Автоматика и телемеханика, 1959, № 10, 11,12, с.1320-1334, 1441-1458, 1561-1578

BƏRABƏRSİZLİK TİP FUNKSIONAL MƏHDUDİYYƏT OLAN BİR SƏRHƏD OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ MƏXSUSİ HALIN TƏDQIQI

S.T.ƏLİYEVƏ

XÜLASƏ

İşdə sistemin halına bərabərsizlik tip funksional məhdudiyət qoyulmuş diskret iki parametrlı sistemlərlə optimal idarə olunan bir sərhəd məsələsinə baxılır. Diskret maksimum prinsipinin analoqu isbat olunmuşdur. Onun cırlaşdığı məxsusi hal tədqiq olunmuşdur.

Açar sözlər: optimal idrəetmə məsələsi, mümkün idarə, optimallıq şərti, məxsusi idarə, diskret maksimum prinsipi

RESEARCH OF A SPECIAL CASE IN ONE BOUNDARY PROBLEM OF OPTIMAL MANAGEMENT IN THE PRESENCE OF FUNCTIONAL LIMITATIONS OF TYPE OF INEQUALITIES

S.T.ALIYEVA

SUMMARY

In this work, we study one boundary-value problem of optimal control of discrete two-parameter systems in the presence of functional constraints such as inequalities on the state of the system. An analogue of the discrete maximum condition is proved. A special case of its degeneration is investigated.

Keywords: optimal control problem, admissible control, optimality condition, special control, discrete maximum principle.

УДК 517.956.35

**СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ
СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ДИНАМИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ
СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО
УРАВНЕНИЯ С СИЛЬНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ**

Г.ШАФИЕВА

*Бакинский Государственный Университет,
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана,
gulshan.shafiyeva@mail.ru*

Исследуется смешанная задача для одномерного волнового уравнения с сильной диссипацией и динамическим условием сопряжения. Доказана корректность рассматриваемой задачи в пространствах типа L_p .

Ключевые слова: волновое уравнение, сильная диссипация, смешанная задача, динамическое условие сопряжения, корректность.

Постановка задачи и основной результат. Смешанная задача с динамическими условиями сопряжения исследована в различных работах [1-3]. Смешанная задача для волновых уравнений с сильной диссипацией исследована в работах [4-6]. В данной работе исследуется смешанная задача для одномерных волновых уравнений с сильной диссипацией и динамическим условием сопряжения.

В области $Q_T = [0, T] \times [0, 2]$ рассмотрим смешанную задачу

$$u_{tt} - u_{xxt} - u_{xx} = f(t, x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

$$v_{tt} - v_{xxt} - v_{xx} = g(t, x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 1 \leq x \leq 2 \quad (2)$$

с граничными условиями

$$u(t, 0) = 0, \quad v(t, 2) = 0, \quad (3)$$

условиями сопряжения

$$u(t, 1) = v(t, 0) = \phi(t), \quad (4)$$

$$\phi_{tt}(t) + u_{xt}(t, 1) - v_{xt}(t, 1) + \beta_1 u_x(t, 1) + \beta_2 v_x(t, 1) + \beta_3 \phi(t) = h(t) \quad (5)$$

и начальными условиями

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), \quad (6)$$

$$\phi'(0) = \phi_1. \quad (7)$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

- (i) $\beta_1, \beta_2 \in R$;
- (ii) $f(t, x) \in C^1([0, T] \times [0, 1])$;
- (iii) $g(t, x) \in C^1([0, T] \times [1, 2])$;
- (iv) $h(t) \in C^1[0, T]$.

Обозначим через $\|\cdot\|_{p,1}$ норму в пространстве $L_p(0,1)$:

$$\|u\|_{p,1} = \left[\int_0^1 |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}},$$

а через $\|\cdot\|_{p,2}$ норму в пространстве $L_p(1,2)$:

$$\|v\|_{p,2} = \left[\int_1^2 |v(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Посредством $W_p^1(a,b;c)$ где $c \in [a,b]$ определим следующее подпространство пространства Соболева $W_p^1(a,b)$: $W_p^1(a,b;c) = \{v : v \in W_p^1(a,b), v(c) = 0\}$. Кроме того, при помощи X_p зададим пространство:

$$X_p = \{w : w = (u, v, \alpha), u \in L_p(0,1), v \in L_p(1,2), \alpha \in C\},$$

$$\|w\|_{X_p} = \left[\int_0^1 \|u(x)\|_p^p dx \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_1^2 \|v(x)\|_p^p dx \right]^{\frac{1}{p}} + |\alpha|,$$

где $w = (u, v, \alpha), u \in L_p(0,1), v \in L_p(1,2), \alpha \in C$. А также следующим образом пространство Y_p :

$$Y_p = \{w : w = (u, v, \phi), u \in W_p^2(0,1) \cap W_p^1(0,1;0), \\ v \in W_p^2(1,2) \cap W_p^1(1,2;2), u(1) = v(1) = \phi\}$$

с нормой

$$\|w\|_{Y_p} = \|u_{xx}\|_{p,1} + \|u_x\|_{p,1} + \|v_{xx}\|_{p,2} + \|v_x\|_{p,2}.$$

В пространстве X_p определим линейный оператор A :

$$Aw = (-u_{xx}(x), -v_{xx}(x), u_x(1) - v_x(1)), \quad w = (u, v, \phi),$$

где

$$D(A) = Y_p = \{w : w = (u, v, \phi), u \in W_p^2(0,1) \cap W_p^1(0,1;0), \\ v \in W_p^2(1,2) \cap W_p^1(1,2;2), u(1) = v(1) = \phi\}$$

Аналогично линейный оператор B :

$$Bw = (-u_{xx}(x), -v_{xx}(x), \beta_1 u_x(1) + \beta_2 v_x(1) + \beta_3 \phi),$$

$$w = (u, v, \phi),$$

где

$$D(B) = Y_p = \{w : w = (u, v, \phi), u \in W_p^2(0,1) \cap W_p^1(0,1;0),$$

$$v \in W_p^2(1,2) \cap W_p^1(1,2;2), u(1) = v(1) = \phi\}$$

Смешанную задачу (1)-(5) можно записать как задачу Коши в пространстве X_p :

$$w'' + Aw' + Bw = F(t), \quad (8)$$

$$w(0) = w_0, \quad w'(0) = w_1, \quad (9)$$

где $w_0 = (u_0, v_0, \phi_0)$, $\phi_0 = u_0(1)$, $w_1 = (u_1, v_1, \phi_1)$, $F(t) = (f(t, x), g(t, x), h(t))$.

Исследуя задачу (8), (9) докажем, что для задачи (1)-(7) справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть выполняются условия (i)-(iv), тогда при любых $u_0(\cdot) \in W_p^2(0,1) \cap W_p^1(0,1;0)$, $u_1(\cdot) \in L_p(0,1)$, $v_0(\cdot) \in W_p^2(1,2) \cap W_p^1(1,2;2)$, $v_1(\cdot) \in L_p(1,2)$, $\phi_1 \in R$ задача (1)-(7) имеет единственное решение (u, v, ϕ) такое, что

$$u(\cdot) \in C([0, T] \times W_p^1(0,1;0)) \cap C^1((0, T) \times L_p[0,1]) \cap$$

$$\cap C^1((0, T) \times W_p^2(0,1) \cap W_p^1(0,1;0)) \cap C^2((0, T) \times L_p[0,1]),$$

$$v(\cdot) \in C([0, T] \times W_p^2(1,2;2)) \cap C^1((0, T) \times L_p[1,2]) \cap$$

$$\cap C^1((0, T) \times W_p^2(1,2) \cap W_p^1(1,2;2)) \cap C^2((0, T) \times L_p[1,2]),$$

$$\phi(\cdot) \in C[0, T] \cap C^1(0, T] \cap C^2(0, T),$$

$$u_x(\cdot, 1), v_x(\cdot, 1) \in C(0, T), u_{tt}(\cdot, 1), v_{tt}(\cdot, 1), u_{tx}(\cdot, 1), v_{tx}(\cdot, 1) \in C(0, T).$$

Доказательство. Сначала исследуем линейный оператор A . Докажем, что A - секториальный оператор в X_p , где $p \geq 1$. С этой целью оценим резольвенту оператора A (см.[7]). Рассмотрим уравнение

$$\lambda \tilde{u} + A\tilde{u} = G, \quad (10)$$

где $G = (\xi(x), \zeta(x), \alpha) \in X_p$.

Уравнение (10) эквивалентно краевой задаче:

$$\lambda u(x) - u''(x) = \xi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (11)$$

$$\lambda v(x) - v''(x) = \zeta(x), \quad 1 \leq x \leq 2, \quad (12)$$

$$u(1) = v(1) = \phi, \quad (13)$$

$$u(0) = 0, \quad (14)$$

$$v(2) = 0, \quad (15)$$

$$\lambda\phi + u'(1) - v'(1) = \alpha, \quad (16)$$

где $\lambda \in C$, $\alpha \in R$.

Пусть $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ гладкие функции удовлетворяющие (9) - (14).

Умножаем обе части (11) на функцию $\bar{u}(x)|u(x)|^{p-2}$. После интегрирования по частям, имеем

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^1 |u(x)|^p dx + \int_0^1 u'(x)(\bar{u}(x)|u(x)|^{p-2})_x dx - u'(1)(\bar{u}(1)|u(1)|^{p-2}) = \\ = \int_0^1 \xi(x)\bar{u}(x)|u(x)|^{p-2} dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Умножаем обе части (12) на $\bar{v}(x)|v(x)|^{p-2}$. После интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \lambda \int_1^2 |v(x)|^p dx + \int_1^2 v'(x)(\bar{v}(x)|v(x)|^{p-2})_x dx + v'(1)(\bar{v}(1)|v(1)|^{p-2}) = \\ = \int_1^2 \zeta(x)\bar{v}(x)|v(x)|^{p-2} dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Умножая обе части (16) на $\bar{\phi}|\phi|^{p-2}$, имеем

$$\lambda|\phi|^p + [u'(1) - v'(1)]\bar{\phi}|\phi|^{p-2} = \alpha\bar{\phi}|\phi|^{p-2}. \quad (19)$$

Сложив полученные равенства (17), (18) и (19) получим, что

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^1 |u(x)|^p dx + \lambda \int_1^2 |v(x)|^p dx + \lambda|\phi|^p + \int_0^1 J_1 dx + \int_1^2 J_2 dx = \\ = \int_0^1 \xi(x)\bar{u}(x)|u(x)|^{p-2} dx + \int_1^2 \zeta(x)\bar{v}(x)|v(x)|^{p-2} dx + \alpha\bar{\phi}|\phi|^{p-2}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$J_1 = u'(x)\bar{u}'(x)|u(x)|^{p-2} + u'(x)\bar{u}(x)(|u(x)|^{p-2})_x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$J_2 = v'(x)\bar{v}'(x)|v(x)|^{p-2} + v'(x)\bar{v}(x)(|v(x)|^{p-2})_x, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

Непосредственно можно проверить, что

$$|\operatorname{Im} J_1| \leq |p-2||u(x)|^{p-2} \left| \operatorname{Im} \frac{u'(x)\bar{u}(x)}{u(x)} \right| \left| (|u(x)|)_x \right|,$$

$$\operatorname{Re} J_1 = (p-1)|u(x)|^{p-2} \left| (|u(x)|)_x \right|^2 + |u(x)|^{p-2} \left| \operatorname{Im} \frac{u'(x)\bar{u}(x)}{u(x)} \right|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{|\operatorname{Im} J_1|}{\operatorname{Re} J_1} \leq \frac{|p-2| \frac{1}{2\sqrt{p-1}} 2\sqrt{p-1} \left| \operatorname{Im} \frac{u'(x)\bar{u}(x)}{u(x)} \right| \left| (u(x))_x \right|}{(p-1) \left| (u(x))_x \right|^2 + \left| \operatorname{Im} \frac{u'(x)\bar{u}(x)}{u(x)} \right|^2} \leq \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}},$$

т.е.

$$|\operatorname{Im} J_1| \leq \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}} \operatorname{Re} J_1, \quad (21)$$

$$|\operatorname{Im} J_2| \leq \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}} \operatorname{Re} J_2. \quad (22)$$

С другой стороны из (20) получаем

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \lambda (\|u\|_{p,1}^p + \|v\|_{p,2}^p + |\phi|^p) + \operatorname{Re} \int_0^1 J_1 dx + \operatorname{Re} \int_1^2 J_2 dx = \\ & = \operatorname{Re} \left[\int_0^1 \xi(x) \bar{u}(x) |u(x)|^{p-2} dx + \int_1^2 \zeta(x) \bar{v}(x) |v(x)|^{p-2} dx + \alpha \bar{\phi} |\phi|^{p-2} \right], \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} \lambda (\|u\|_{p,1}^p + \|v\|_{p,2}^p + |\phi|^p) + \operatorname{Im} \int_0^1 J_1 dx + \operatorname{Im} \int_1^2 J_2 dx = \\ & = \operatorname{Im} \left[\int_0^1 \xi(x) \bar{u}(x) |u(x)|^{p-2} dx + \int_1^2 \zeta(x) \bar{v}(x) |v(x)|^{p-2} dx + \alpha \bar{\phi} |\phi|^{p-2} \right]. \quad (24) \end{aligned}$$

В силу (23), (24), имеем

$$\operatorname{Re} \int_0^1 J_1 dx + \operatorname{Re} \int_1^2 J_2 dx - \eta \left| \operatorname{Im} \int_0^1 J_1 dx \right| - \eta \left| \operatorname{Im} \int_1^2 J_2 dx \right| \geq 0,$$

где $0 \leq \eta \leq \frac{2\sqrt{p-1}}{|p-2|}$.

Учитывая данное неравенство, из (23), (24), заключаем

$$\begin{aligned} & (\operatorname{Re} \lambda + \eta |\operatorname{Im} \lambda|) (\|u\|_{p,1}^p + \|v\|_{p,2}^p + |\phi|^p) \leq \\ & \leq (1 + \eta) \left(\int_0^1 |\xi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |u(x)|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} + \\ & + (1 + \eta) \left(\int_1^2 |\zeta(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_1^2 |v(x)|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} + \alpha |\phi|^{p-1}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} & (\operatorname{Re} \lambda + \eta |\operatorname{Im} \lambda|) (\|u\|_{p,1}^p + \|v\|_{p,2}^p + |\phi|^p) \leq \\ & \leq \left[(1 + \eta) \left(\int_0^1 |\xi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + (1 + \eta) \left(\int_1^2 |\zeta(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \alpha \right] \times \end{aligned}$$

$$\times \left[\left(\int_0^1 |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_1^2 |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + |\phi| \right]^{p-1}.$$

Далее получим

$$\begin{aligned} & (\operatorname{Re} \lambda + \eta |\operatorname{Im} \lambda|) (\|u\|_{p,1}^p + \|v\|_{p,2}^p + |\phi|^p) \leq \\ & \leq 3(1 + \eta) \left[\left(\int_0^1 |\xi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_1^2 |\zeta(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \alpha \right] \times \\ & \times \left[\left(\int_0^1 |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_1^2 |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + |\phi| \right]^{p-1}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} & (\operatorname{Re} \lambda + \eta |\operatorname{Im} \lambda|) (\|u\|_{p,1}^p + \|v\|_{p,2}^p + |\phi|^p) \leq \\ & \leq 3(1 + \eta) (\|\xi\|_{p,1}^p + \|\zeta\|_{p,2}^p + |\alpha|). \end{aligned}$$

Отсюда учитывая (11) - (13) и (16) имеем

$$\begin{aligned} & (\operatorname{Re} \lambda + \eta |\operatorname{Im} \lambda|) (\|u\|_{p,1}^p + \|v\|_{p,2}^p + |\phi|^p) \leq \\ & \leq 3(1 + \eta) (\|\lambda u(x) - u''(x)\|_{p,1}^p + \|\lambda v(x) - v''(x)\|_{p,2}^p + \\ & + |\lambda \phi + u'(1) - v'(1)|). \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим задачу (11) - (16) в точке $\lambda = 0$. Решая соответствующую задачу, получим, что

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{x}{2} \left[\alpha + \int_1^2 \left(\int_1^y \zeta(s) ds \right) dy + \int_0^1 \left(\int_y^1 \xi(s) ds \right) dy \right] + \\ & + \int_0^x \left(\int_y^1 \xi(s) ds \right) dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ v(x) &= \frac{2-x}{2} \left[\alpha - \int_1^2 \left(\int_1^y \zeta(s) ds \right) dy + \int_0^1 \left(\int_y^1 \xi(s) ds \right) dy \right] - \\ & - \int_x^2 \left(\int_1^y \zeta(s) ds \right) dy, \quad 1 \leq x \leq 2, \\ \phi &= \frac{1}{2} \left[\alpha + \int_0^1 \left(\int_y^1 \xi(s) ds \right) dy + \int_1^2 \left(\int_1^y \zeta(s) ds \right) dy \right]. \end{aligned}$$

Учитывая условия (i)-(iv) имеем

$$\|u\|_{p,1}^p + \|v\|_{p,2}^p + |\phi|^p \leq c [\|\xi\|_{p,1}^p + \|\zeta\|_{p,2}^p + |\alpha|],$$

т.е.

$$\|w\|_{X_p} \leq c \|Aw\|_{X_p}.$$

Таким образом, $\lambda = 0$ принадлежит резольвентному множеству оператора A .

Поэтому, в силу (25) $K = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda + \eta |\operatorname{Im} \lambda| > 0\}$ принадлежит резольвентному множеству линейного оператора A и существует такое $M > 0$, что

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|_{X_p \rightarrow X_p} \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \lambda \in K,$$

т.е. A - секториальный оператор в X_p .

Пусть выполняются условия (i)-(iv) и $p \geq 1$, тогда из определения линейного оператора B получим, что B ограниченный оператор, действующий из Y_p в X_p .

Далее сведя задачу (8), (9) к системе уравнений первого порядка в пространстве $E = Y_p \times X_p$ и, применяя теорему существования задачи Коши, получим утверждение теоремы (см. [4, 8, 9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Munoz Rivera J.E., Portillo Oquendo, H. The transmission problem of viscoelastic waves // Acta Applicandae Mathematicae, 2000, vol. 62, No 1, p. 1-21.
2. Aliev A.B., Mammadhasanov E.H., Well-posedness of initial boundary value problem on longitudinal impact on a composite linear viscoelastic bar // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2017, vol. 40, No 14, p. 5380-5390.
3. Aliev A.B., Mamedova U.M., A mixed problem for quasilinear impulsive hyperbolic equations with non-stationary boundary and transmission conditions // Advance in difference equations. vol. 2010, Article ID101959, doi, 10, 1155/2010/101959, p. 1-19.
4. Webb G.F., Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation, Canadian Journal of Mathematics, 1980, vol. XXXII, no. 3, p. 631-643.
5. Vittorino Pata and Sergey Zelik, Smooth attractors for strongly damped wave equations, Nonlinearity, 2006, vol.19, p. 1495–1506.
6. A.B. Aliev and G.Kh. Shafieva, Mixed Problem with Dynamical Boundary Condition for a One-Dimensional Wave Equation with Strong Dissipation Mathematical Notes, 2020, vol. 107, no. 3, p. 152–155.
7. Соболевский П.Е., Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве, Воронеж, Гр. ММО, том 10, 1961, с.297–350.
8. Хенри Д., Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений, М.: Мир, 1985, 376 с.
9. Крейн С.Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М.: Наука, 1967, 464 с.

GÜCLÜ DISSIPASİYALI, BİRÖLÇÜLÜ DALĞA TƏNLİYİ ÜÇÜN DİNAMİK QOŞMALIQ ŞƏRTİ DAXİLİNDƏ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN HƏLLİNİN VARLIĞI VƏ YEGANƏLİYİ

G.ŞƏFİYEVƏ

XÜLASƏ

Güclü dissipasiyalı birölçülü dalğa tənliyi üçün dinamik qoşmalığ şərti daxilində qarışıq məsələ araşdırılmışdır. Baxılan məsələnin L_p -də korrektliyi araşdırılmışdır.

Açar sözlər: dalğa tənliyi, güclü dissipasiya, qarışıq məsələ, dinamik qoşmalığ şərti, korrektlik.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS TO THE MIXED PROBLEM WITH DYNAMICAL TRANSMISSION CONDITION FOR A ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH STRONG DISSIPATION

G.SHAFIYEVA

SUMMARY

The mixed problem for a one-dimensional wave equation with strong dissipation and dynamical transmission condition is investigated. The correctness of the problem in space type L_p is proved.

Key words: wave equation, strong dissipation, mixed problem, dynamical transmission condition, correctness.

MEXANİKA

УДК 531+539.3

DÜZBUCAQLI TAĞA TƏSİR EDƏN
BÖHRAN QÜVVƏNİN TƏYİN OLUNMASIM.F.MEHDİYEV, L.F.FƏTULLAYEVA,
N.İ.FOMİNA, N.E.QARAYEVA*Bakı Dövlət Universiteti*
laura_fat@rambler.ru

Məqalədə düzbucaqlı formada olan tağın gərginlik-deformasiya vəziyyətinin (GDV) həndəsi qeyri-xətti qoyuluşda tədqiqi verilmişdir. Əgər tağ mürəkkəb fəza konfigurasiyasına malikdirsə, deformasiyalar sonludursa, tağa xaricdən təzyiq olunursa, onda GDV-nin analizi üçün riyazi xarakterli çətinliklər yaranır. Buna görə də qoyulmuş məsələnin həlli üçün təqribi hesablaşma üsullarının, baxılan halda isə variyasiya üsulunun tətbiqi vacibdir [1]. Funksionalın stasionar qiymətlərini tapmaq üçün Reley-Rits üsulundan istifadə olunur. Nəticədə, elastiki, düzbucaqlı tağın dayanıqlıq məsələsi cəbri tənliyin həllinə gətirilir və tağa təsir edən böhran qüvvə üçün analitik ifadə alınır.

Açar sözlər: düzbucaqlı tağ, variyasiya üsulu, gərginlik-deformasiya vəziyyəti, böhran qüvvə, Reley-Rits üsulu, oynaq bağlanma.

Üçoynaqlı çərçivə modeli tağın qeyri-xətti deformasiyasının əsas xüsusiyyətlərini göstərən ilkin modellərdən biridir. Bu xüsusiyyətlər belədir:

- 1) sabit yüklənmə zamanı bir neçə tarazı formalarının varlığı;
- 2) dayanıqlığın “böyük” formada itirilməsinin mümkünlüyü.

İkinci xüsusiyyətin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, bu zaman dayanıqlığın itirilməsi bir formadan digər formaya sıçrayış şəklində keçir. Qeyri-xətti deformasiyanın 1)-2) xüsusiyyətləri düzbucaqlı formada olan ikioynaqlı tağın əyilməsinin qeyri-xətti məsələsinin həllində də aşkar olunmuşdur. Bu zaman tağ müntəzəm, normal təzyiq altındadır və məsələnin təqribi həlli energetik üsulla alınmışdır. Sonralar isə tağın dayanıqlığının xəttiləşdirilmiş məsələləri həll olunmağa başlandı. Elektron-hesablama texnologiyalarının inkişafı konstruksiyaların deformasiyasının qeyri-xətti sərhəd məsələlərinin həll üsullarını daha da aktual etdi. Belə effektiv üsullardan biri də variyasiya prinsipidir. Qurulmuş funksionalın əsas xarakterik xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, burada parametrlərin özləri yox, onların sürətləri iştirak edir.

Elastiklik nəzəriyyəsi məsələsinin varyasiya prinsipi formasında qoyulması əsasən iki halda istifadə olunur. Birinci halda, funksionalın stasionarlıq şərti əsasında bu məsələnin həlli üçün ədədi üsullar qurulur (Rits üsulu, sonlu elementlər üsulu və s.). Bütün bu üsullar elastiklik nəzəriyyəsi məsələlərinin həllinə tətbiq olunan düz üsullar sinfinə aiddirlər. Qeyd etmək lazımdır ki, belə düz üsullar diferensial tənliklərin istifadəsinin aşkar formasını tələb etmirlər.

Variyasiya prinsipinin tətbiq olunmasının ikinci xarakterik halı baxılan məsələnin diferensial tənliklərinin və sərhəd şərtlərinin alınmasından ibarətdir, qurulmuş diferensial tənliklər uyğun funksionalın Eylər tənlikləri rolunu oynayır. Bu cür həll yolu mürəkkəb formalı və quruluşlu cisimlər üçün (məsələn, çoxlaylı örtüklər, çoxoynaqlı tağlar və s.), həmçinin bir koordinat sistemindən digər koordinat sisteminə keçid zamanı (dekart koordinat sistemindən polyar, əyrixətli və başqa sistemlərə) əlverişlidir.

1. Məsələnin qoyuluşu

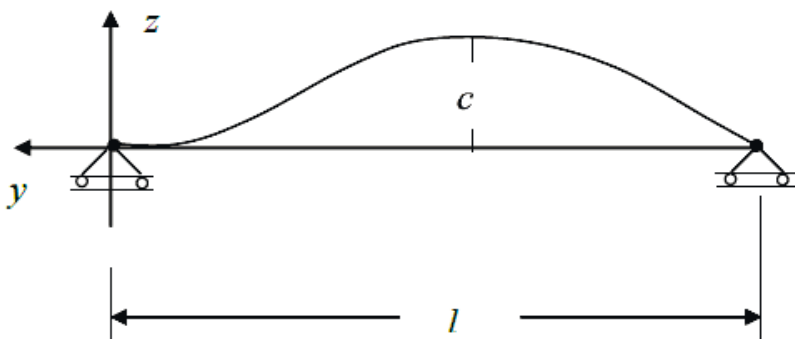
Təklif olunan varyasiya üsulunun effektivliyi qalınlığına görə qeyri-bircins, ucları oynaq bağlanmış düzbucaqlı tağın dayanıqlığının təyini problemi üzərində göstərilir. Baxılan tağ səthi boyunca müntəzəm paylanan şaquli intensivliyi q olan təzyiqlə altındadır.

Fərz edək ki, hər iki ucu oynaq bağlanmış düzbucaqlı tağın oxu bu şəkildədir [2]:

$$\omega = c_0 \eta \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \quad (1)$$

burada c_0 - tağın qalxma oxu, η - aproksimasiya funksiyası, l - tağın dayaqları arasındakı məsafə, z isə şaquli koordinatdır (şəkil 1). Aydınır ki, (3.6) ifadəsi hər iki ucun oynaq bağlanması sərhəd şərtlərini ödəyir, yəni:

$$\omega(0) = \omega(l) = 0.$$



Şək. 1. Hər iki ucu oynaq bağlanmış düzbucaqlı tağın modeli

Tağın en kəsiyi düzbucaqlı formasındadır, onun hündürlüyü $2h$, eni isə b -dir. Fərz olunur ki, tağ həndəsi olaraq qeyri-xəttidir, yəni o, qalınlıqları müxtəlif olan n sayda laydan ibarətdir. Layların hər birinin qalınlığını δ_{k+1} ilə

$$\text{işarə edək, onda } \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k+1} = 2h.$$

Tağın hal tənliyini aşağıdakı bərabərlik şəklində yazaq:

$$\varepsilon^y = \frac{\sigma}{E_{k+1}(y)}, \quad a_k \leq y \leq a_{k+1}, \quad (2)$$

burada σ - gərginlik, E_{k+1} , $[k=0,1,\dots,(s-1)]$, k -cı layın materialının elastiklik moduludur. Hər bir layda elastiklik modulu y - üfiqi koordinatdan asılıdır: $E_{k+1} = E_{k+1}(y)$. (2) ifadəsində

$$a_k = -h + \sum_{j=0}^k \delta_j \quad (\delta_0 = 0)$$

əvəzləməsi aparılmışdır.

Funksionalın ifadəsini aşağıdakı kimi daxil edək [3]:

$$J = b \int_{-h}^h \int_0^l \left\{ \dot{\sigma} \dot{\varepsilon} + \frac{1}{2} \sigma \dot{\omega}_{,z} \right\} dy dz - \frac{1}{2} \int_{-h}^h \int_0^l \dot{\sigma} \dot{\varepsilon}^y dy dz + \int_0^l \dot{q} \dot{\omega} dz. \quad (3)$$

(2) ifadəsini nəzərə alsaq, funksionalın (3) düsturu bu formada olar:

$$J = b \int_{-h}^h \int_0^l \left\{ \dot{\sigma} \dot{\varepsilon} + \frac{1}{2} \sigma \dot{\omega}_{,z} \right\} dy dz - \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\dot{\sigma}^2}{E_{k+1}(y)} dy dz + \int_0^l \dot{q} \dot{\omega} dz. \quad (4)$$

(4) düsturunda deformasiyanın sürəti belə təyin olunur:

$$\dot{\varepsilon} = \omega_{,z} \dot{\omega}_{,z} - y \dot{\omega}_{,zz}. \quad (5)$$

Approksimasiya funksiyasını və onun sürətini belə təyin edək:

$$\sigma = E_1 \left(\sigma_0^y + \sigma_1^y \left(\frac{2y}{h} \right) \right), \quad \dot{\sigma} = E_1 \left(\dot{\sigma}_0^y + \dot{\sigma}_1^y \left(\frac{2y}{h} \right) \right). \quad (6)$$

burada

$$\sigma_0^y = \sigma_0 \sin \left(\frac{\pi z}{l} \right), \quad \sigma_1^y = \sigma_1 \sin \left(\frac{\pi z}{l} \right).$$

2. Böhran qüvvə üçün ifadənin alınması

Hesablamaların sonrakı gedişatı belədir: (1), (5), (6) ifadələri və onların uyğun törəmələri funksionalın (4) düsturunda yerinə yazılır, sonra isə riyazi hesablamalar aparılır. Nəticədə funksional üçün aşağıdakı ifadə alınır:

$$J = \frac{bhE_1\pi^2}{l} c_0^2 \dot{\sigma}_0 \eta \dot{\eta} + \frac{2}{3} bh^2 E_1 c_0 \frac{\pi^2}{l} \dot{\sigma}_1 \dot{\eta} + \frac{1}{2} bhE_1 \frac{\pi^2}{l} c_0^2 \dot{\eta}^2 \sigma_0 -$$

$$-\frac{bl}{2}E_1^2\dot{\sigma}_0^2\Phi_0 - \frac{4l}{\pi h}bE_1^2\dot{\sigma}_0\dot{\sigma}_1\Phi_1 - \frac{bl}{2h^2}E_1^2\dot{\sigma}_1^2\Phi_2 + \dot{\eta}c_0\frac{2l}{\pi}. \quad (7)$$

(7) funksionalının stasionar qiymətlərini tapmaq üçün Reley-Rits üsulundan istifadə olunur və funksionalın stasionar qiyməti hesablanır:

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{\eta}} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \dot{\sigma}_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \dot{\sigma}_1} = 0.$$

Onda belə bir tənliklər sistemi alınır:

$$\begin{aligned} \frac{bhE_1\pi^3}{2l^2}c_0\dot{\sigma}_0\dot{\eta} + \frac{1}{3}bh^2E_1\frac{\pi^3}{l^2}\dot{\sigma}_1 + \frac{1}{2}bhE_1\frac{\pi^3}{l^2}c_0\dot{\eta}\sigma_0 + 1 &= 0, \\ \frac{\pi^2}{l}c_0^2h\dot{\eta}\dot{\eta} - lE_1\dot{\sigma}_0\Phi_0 - \frac{4l}{\pi h}E_1\dot{\sigma}_1\Phi_1 &= 0, \\ \frac{2\pi^2}{3l}c_0h^2\dot{\eta} - \frac{4l}{\pi h}E_1\dot{\sigma}_0\Phi_1 - \frac{l}{h^2}E_1\dot{\sigma}_1\Phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

(8) tənliklərini

$$\eta(0) = 1, \quad \sigma_0(0) = \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0$$

başlangıç şərtləri daxilində inteqrallasaq, alarıq:

$$\begin{aligned} \frac{bhE_1\pi^3}{2l^2}c_0\sigma_0\dot{\eta} + \frac{1}{3}bh^2E_1\frac{\pi^3}{l^2}\sigma_1 + \frac{1}{2}bhE_1\frac{\pi^3}{l^2}c_0\eta\sigma_0 + q &= 0, \\ \frac{\pi^2}{2l}c_0^2h\eta^2 - lE_1\sigma_0\Phi_0 - \frac{4l}{\pi h}E_1\sigma_1\Phi_1 &= 0, \\ \frac{2\pi^2}{3l}c_0h^2\eta - \frac{4l}{\pi h}E_1\sigma_0\Phi_1 - \frac{l}{h^2}E_1\sigma_1\Phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

(9) tənliklər sisteminin sonuncu iki tənliyindən σ_0 və σ_1 parametrlərini tapıb, birinci tənlikdə yerinə yazsaq və

$$\xi = \frac{c_0}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{l}, \quad \tau = \frac{q}{E_1b}, \quad \varphi_0 = \frac{E_1}{h}\Phi_0, \quad \varphi_1 = \frac{E_1}{h^2}\Phi_1, \quad \varphi_2 = \frac{E_1}{h^3}\Phi_2$$

ölçüsüz kəmiyyətləri daxil etsək, böhran qüvvəni təyin etməkdən ötrü aşağıdakı tənliyi almış olarıq:

$$\tau = \left[-3\pi^7\xi^3\lambda^4\varphi_2\eta^3 + 20\pi^6\xi^2\lambda^4\varphi_1\eta^2 - \frac{4}{3}\pi^7\xi\lambda^4\varphi_0\eta \right] \cdot A^{-1}, \quad (10)$$

burada

$$A = 6\pi^2\varphi_0\varphi_2 - 96\varphi_1^2.$$

Aydındır ki, böhran qüvvə öz ekstremal qiymətini

$$\frac{d\tau}{d\eta} = 0 \quad (11)$$

olduqda alır. Bu zaman tağın konstruksiyasında çatlama əmələ gəlir. (11) tənliyindən η_{bh} -nin qiyməti tapılır və bu qiymət (10) ifadəsində yerinə yazılmaqla, böhran qüvvə hesablanır.

3. Nəticə

Beləliklə, (10) tənliyi qeyri-xətti cəbri tənlikdir. Orada iştirak edən kəmiyyətlər düzbucaqlı tağın həndəsi və mexaniki-fiziki parametrləridir. Bu parametrləri verməklə, böhran qüvvə hesablanır. Tağın materialını xarakterizə edən parametrlərin qiymətlərindən asılı olaraq, böhran qüvvəni azaltmaq və ya artırmaq olar. Onda konstruksiyaların dayanıqlığının optimal variantını əldə etmək mümkündür.

ƏDƏBİYYAT

1. Амензаде Р.Ю., Мустафаева Э.М.: Фатуллаева Л.Ф. Вариационный подход к определению критических нагрузок для многослойных стержней // Журнал «Механика-машиностроение». Баку: Азербайджанский Технический Университет, 2010, № 1, с. 9-11.
2. Фатуллаева Л.Ф. Прощелкивание неоднородной по толщине нелинейно-упругой полой арки // Владикавказский математический журнал. Апрель-июнь, 2005, т.7, вып.2, с.86-89.
3. Mekhtiyev M.F., Fatullayeva L.F., Fomina N.I. A variational approach to solving the problem of the stability of a gentle arch // International Conference "Modern Problems of Mathematics and Mechanics" devoted to the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics. 23-25 October, 2019, Baku, Azerbaijan, pp.373-375.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ПРЯМОУГОЛЬНУЮ АРКУ

М.Ф.МЕХТИЕВ, Л.Ф.ФАТУЛЛАЕВА, Н.И.ФОМИНА, Н.Э.КАРАЕВА

РЕЗЮМЕ

В представленной статье дано исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) прямоугольной арки в геометрически нелинейной постановке. Когда арка имеет сложную пространственную конфигурацию, её деформации конечны и на арку действует внешняя нагрузка, тогда для анализа НДС возникают трудности математического характера. Поэтому для решения поставленной задачи необходимо применение приближенных вычислительных методов, в данном случае, вариационного метода [1]. Чтобы найти стационарные значения функционала, используется метод Релея-Ритца. В результате задача устойчивости упругой прямоугольной арки сводится к решению алгебраического уравнения, и, таким образом, получается аналитическое выражение для критической силы, действующей на арку.

Ключевые слова: прямоугольная арка, вариационный метод, напряженно-деформированное состояние, критическая сила, метод Релея-Ритца, шарнирное опирание.

DETERMINATION OF THE CRITICAL FORCE ON THE RECTANGULAR ARCH

M.F.MEKHTIYEV, L.F.FATULLAYEVA, N.I.FOMINA, N.E.KARAYEVA

SUMMARY

In the presented article the study of stress-deformed state (SDS) of rectangular arch in geometrically nonlinear production is given. When the arch has a complex spatial configuration, its deformations are finite and there is an external load on the arch, then difficulties of a mathematical nature arise for SDS analysis. Therefore, in order to solve the problem, it is necessary to use approximate computational methods, in this case, of variation method [1]. To find stationary functional values, the Relay-Ritz method is used. As a result, the stability problem of an elastic rectangular arch is reduced to solving an algebraic equation, and thus an analytic expression is obtained for the critical force acting on the arch.

Keywords: a rectangular arch, a variation method, the stress- deformed state, critical force, the Relay-Ritz method, a hinge support conditions.

İNFÖRMATİKƏ

УДК 622.276.1/4.001.57

**İŞLƏNİLMƏNİN SON MƏRHƏLƏSİNDƏ OLAN NEFT
YATAQLARININ QALIQ NEFT EHTİYATLARININ
ÇIXARILMASINDA POLİMER ƏSASLI NANOSİSTEMİN TƏTBİQİ
İMKANLARININ QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ****M.S.XƏLİLÖV***Bakı Dövlət Universiteti*
khalilov_mubariz@mail.ru

Gilli neft layına polimerlə təsir məsələsinə baxılır. Layda vurucu və hasilat quyuları yerləşir. Vurucu quyularda laya vurulan polimer məhlulunun miqdarı verilir. Layın vəziyyətinə uyğun sıxışdırılma prosesi rejimində hasilat quyularından hasil olunan fazaların və işlənilmənin digər texniki-texnoloji göstəricilərinin təyin olunması tələb olunur.

Açar sözlər: ədədi üsullar, neft, polimer, nanohissəcik, lay.

Neft yataqlarının işlənilməsi zamanı lay təzyiqinin saxlanması və layların neftvermə əmsalının artırılması məqsədilə obyektlərə su və ya onun müxtəlif əlavələri vurulur. Bu proses səmərəli olsa da, onun tətbiqi nəticəsində layda iki tip qalıq neft formalaşır.

Birinci tip qalıq neft layın su ilə yuyulmuş zonalarında yaranır və ilkin neftlə müqayisədə məsələlərdə və süxur səthində kifayət qədər ağır komponentləri (qətran, asfalten, parafin) özündə saxlayır [1].

İkinci tip qalıq neft yatağın ilkin neftindən az fərqlənir və qeyri-bircins kollektorlardan neftin tam sıxışdırılmaması nəticəsində yaranır. Bu tip qalıq neftin formalaşmasının səbəbləri süxur-kollektorun qeyri-bircinslik quruluşu (müxtəlif keçiricilikli zonaların mövcudluğu), həmçinin sıxışdırılan və sıxışdırılan fluidlərin süzülmə qanunauyğunluqlarının müxtəlif olmasıdır [2,6].

Qalıq neftin çıxarılması probleminin həlli üçün çoxsaylı təsir üsulları işlənilmiş və mədənlərdə sınaqdan çıxarılaqla sənaye miqyasında tətbiq olunmuşdur [8-10 və s.]. Lakin bu problemin həlli hələ də açıq və aktual problem olaraq qalır.

Birinci və ikinci tip qalıq neftlərin çıxarılmasının təmin olunması üçün mövcud təsir üsullarını aşağıdakı şəkildə klassifikasiya etmək olar:

-istilik üsulları; məhsuldar laya bilavasitə istiliyin daxil edilməsi və ya

onun ötürülməsi yerinə yetirilir. Bu üsullara tsikli və ya kəsilməz buxarın vurulması, isti suyun vurulması, laydaxili yanma aiddir.

-qaz üsulları; laya CO_2 -qazının, azotun, karbohidrogen və dəm qazının vurulması aid edilir.

-fiziki-kimyəvi üsullar; hidrofil süxurda neftin bloklanma dərəcəsinin azaldılması üçün laya fazalar arası səthi gərilməni aşağı salan reagentlərin vurulmasına baxılır. Həmçinin süzülmə axınlarının dəyişdirilməsi və suyun qəbul edilməsinin profilinin bərabərləşdirilməsi üçün polimer və digər kimyəvi reagentlərdən istifadə edilir.

Dünyada qalıq neftin çıxarılmasında istifadə edilən üsulların bölgü payının təxminən 42%-i istilik üsullarının, 27%-i qaz üsullarının, 31%-i isə fiziki-kimyəvi üsulların tətbiqinə əsaslanır [8].

Fiziki-kimyəvi üsulların tətbiqi ilə qalıq neftin çıxarılmasında istifadə olunan texnologiyalar SAM qarışıqlarla, qələvilərlə, polimer dispers sistemlərlə, qel və çökmə yaradan reagentlər və polimer qarışıqlarla təsirə əsaslanır [7, 8].

Bu üsulların içərisində ən çox tətbiqini tapan polimerlərlə təsir üsuludur. Polimerli suvurmada çoxsaylı polimer reagentlər istifadə olunur və onların tətbiqinə əsaslanan aşağıdakı bir neçə əsas üsullar mövcuddur [9]: su və neftin hərəkətliliyi nisbətini azaldan polimer reagentlərin tətbiqi üsulu; layın həm dərinliyi üzrə və həmçinin quyudibi zonanın işlənilməsində yüksək keçiricilikli zonaları bağlamaq məqsədilə polimer sistemləri çarpaz tikə bilən təsir üsulu.

Eksperimental tədqiqatlar göstərir ki, qalıq neft ehtiyatlarının işlənilməyə cəlb edilməsi üçün Na-karboksimetil sellüloza, SAM, metal nanohissəciklərdən və sudan ibarət polimer əsaslı nanosistemin tətbiqi praktiki əhəmiyyətli olar.

Neftin və vurulan suyun özlülükləri nisbəti neft hasilatının artırılmasında vacib amillərdən hesab edilir. Laya vurulan suya yüksək molekullu polimerlər əlavə edildikdə sıxışdırılan fluidin özlülüyü artırılır və nəticədə neftin sıxışdırılma cəbhəsi kifayət qədər düzgün (müntəzəm) hala gəlir [9].

Qalıq neftin çıxarılma şəraitinin mürəkkəbliyi polimer reagentlərin tətbiqinə və onların daha da təkmilləşdirilməsinə kifayət qədər böyük tələblər qoyur və onların yaradılmasına yeni yanaşmaların işlənilməsinin zəruriliyini şərtləndirir. Kapilyar saxlanılma və təbəqə neftinin, həmçinin zəif keçiricilikli kollektorlarda və su ilə əhatə oluna bilinməyən lay hissələrində qalan neftin ümumi ehtiyatın daha çox hissəsini təşkil etdiyindən təsiretmə zamanı yüksək nüfuzetmə qabiliyyətli nanostrukturulu reagentlərin tətbiqi böyük əhəmiyyət daşıyır. Nanohissəcik əsaslı reagentin neftçıxarma sənayesində praktiki tətbiqi öz əksini çox az tapmışdır. Halbuki müxtəlif əsasda nanomaterialların mövcud sintez üsulları mövcud reagentlərin sintezindən əvvəl konkret üstünlüklərə malikdir. [9] eksperimental tədqiqatlar göstərir ki, nanohissəcik əsaslı polimer sistemlərin seçilməsi (hazırlanması) və onların sulu məhlulu ilə laya təsirdə süxur səthində və məsamə kanallarında toplanan qalıq neftin çıxarılma əmsalının 0.2-0.25 artımına nail olmaq mümkündür.

Bu məqsədlə süxur-kollektorun mineroloji tərkibini nəzərə almaqla laya polimer əsaslı məhlullarla təsiretmədə qalığı neft ehtiyatlarının işlənməyə cəlb edilməsi ilə neftveriminin artırılması imkanlarının proqnoz qiymətləndirməsi aktualıq kəsb edir.

Məsələnin qoyuluşu

Gilli neft layına polimerlə təsir məsələsinə baxılır. Layda vurucu və hasilat quyuları yerləşir. Vurucu quyularda laya vurulan polimer məhlulunun miqdarı verilir. Layın vəziyyətinə uyğun sıxışdırılma prosesi rejimində hasilat quyularından hasil olunan fazaların və işlənmənin digər texniki-texnoloji göstəricilərinin təyin olunması tələb olunur.

Proses hər bir faza üçün kəsilməzlik, süzülmə qanununun, fazaların hal tənliklərinin, sulu fazada duz və polimerin konsentrasiyası tənliklərinin və fazalar arasındakı doyma tənliyinin birgə kombinasiyası əsasında təklif olunan iki fazalı dörd komponentli model əsasında təsvir edilmişdir [1, 7]:

$$\frac{\partial}{\partial t} [ms + \omega] + \operatorname{div} U_e = \sum_{e=1}^{n_1} Q_{ee}^u(t) \delta(x - x_e^u, y - y_e^u) + \sum_{l=1}^{n_2} Q_{le}^v(t) \delta(x - x_l^v, y - y_l^v), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [m(1-s)] + \operatorname{div} U_u = \sum_{l=1}^{n_2} Q_{ju}^v(t) \delta(x - x_l^v, y - y_l^v), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [mcs + mr_1(1-s) + a_s] + \operatorname{div}(cU_e + r_1U_u) = \operatorname{div}(D_s \operatorname{grad} c) + \\ & + \sum_{e=1}^{n_1} cQ_{ee}^u(t) \delta(x - x_e^u, y - y_e^u) + \sum_{l=1}^{n_2} (cQ_{le}^v(t) + r_1Q_{lu}^v(t)) \delta(x - x_l^v, y - y_l^v), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [mbs + mr_2(1-s) + a_p] + \operatorname{div}(bU_e + r_2U_u) = \operatorname{div}(D_p \operatorname{grad} b) + \\ & + \sum_{e=1}^{n_1} bQ_{ee}^u(t) \delta(x - x_e^u, y - y_e^u) + \sum_{l=1}^{n_2} (bQ_{le}^v(t) + r_2Q_{lu}^v(t)) \delta(x - x_l^v, y - y_l^v), \quad (4) \end{aligned}$$

$$s(x, y, t)|_{t=0} = s_0(x, y), \quad c(x, y, t)|_{t=0} = c_0(x, y),$$

$$b(x, y, t)|_{t=0} = b_0(x, y), \quad (0 \leq x \leq l_x; 0 \leq y \leq l_y), \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial p_e}{\partial x} \right|_{x=0, l_x} = 0, \quad \left. \frac{\partial b}{\partial x} \right|_{x=0, l_x} = 0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=0, l_x} = 0, \quad 0 \leq y \leq l_y,$$

$$\left. \frac{\partial p_e}{\partial y} \right|_{y=0, l_y} = 0, \quad \left. \frac{\partial b}{\partial y} \right|_{y=0, l_y} = 0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0, l_y} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

burada

$$U_l = \begin{cases} -\frac{kf_l(s,b,c)}{\mu_l(s,b,c)} \text{grad}p_l \left[1 - \frac{G_l}{\text{grad}p_l} \right], & \text{grad}p_l > G_l, \\ 0, & \text{grad}p_l < G_l, \quad G_l = G_l(s,b,c) \end{cases}$$

$$p_n - p_e = \sigma \sqrt{\frac{m}{k}} J(s,b,c); \quad (7)$$

$$m = m(s,b,c); \quad \omega = \omega(s,b,c); \quad a_s = a_s(s,c); \quad a_p = a_p(s,b,c);$$

U_l - fazaların süzülmə sürəti ($l = e$ - su, $l = n$ - neft); s - su ilə doyma; $(1-s)$ - neftlə doyma; ω -gilə adsorbsiya olunmuş suyun miqdarı; c və b , r_1 və r_2 - uyğun olaraq su və neftdə duzun və polimerin konsentrasiyaları; a_s və a_p - sorbsiya olunmuş suyun və polimerin miqdarı; k - mütləq keçiricilik; μ_l ($l = e, n$) - fazaların özlülüyü; f_l ($l = e, n$) - nisbi faza keçiricilikləri; G_l ($l = e, n$) -süzülmənin başlanğıc qradiyenti; p_l ($l = e, n$) -fazalarda təzyiq; σ - fazaların ayrılma sərhəddində səthi gərginlik; J - Leverett funksiyası; m_1 və m_2 - uyğun olaraq vurucu və hasilat quyularının sayı; (x_i^n, y_i^n) və (x_j^s, y_j^s) - vurucu və hasilat quyularının koordinatları; $Q_{ei}^n(t)$ - layın vahid hündürlüyündə i -ci vurucu quyunun suya görə həcmi sərfi; $Q_{ej}^s(t)$ və $Q_{ij}^s(t)$ - layın vahid hündürlüyündə j -cu hasilat quyusunun su və neft fazalarına görə həcmi debitləri; m -məsaməlik; t -zamandır.

(1)-(7) tənliklər sistemində naməlum kəmiyyətlər su ilə doyma(s), su fazasında duz(c) və polimer konsentrasiyası (b)və su fazasının (p_e) təzyiqidir.

(1)-(7) sistemindən U_e, U_n fazalarının süzülmə sürətlərini və neft fazasının p_n təzyiqini yox etməklə və bəzi hesablamaları çevrilmələrini aparmaqla p_e, s, c və b -yə nəzərən məsələ alınır:

$$\text{div}(\lambda_{ne} \text{grad}p_e) + \text{div}(\lambda_n \text{grad}p_n) + \text{div}(\lambda_w) + \frac{\partial}{\partial t} [m + \omega] = \sum_{e=1}^{n_1} Q_{ee}^n(t) \delta(x - x_e^n, y - y_e^n) + \sum_{l=1}^{n_2} (Q_{le}^s(t) + Q_{ln}^s(t)) \delta(x - x_l^s, y - y_l^s), \quad (8)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{m} \left\{ [\text{div}(\lambda_e \text{grad}p_e)] + \text{div}(\lambda_e G_e) - s \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\partial \omega}{\partial t} + \sum_{e=1}^{n_1} Q_{ee}^n(t) \delta(x - x_e^n, y - y_e^n) \right\}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{ms} & \left\{ \left[\operatorname{div}(D_s \operatorname{grad} c) \right] - \frac{\partial [mr_1(1-s) + a_s]}{\partial t} - c \frac{\partial ms}{\partial t} - \operatorname{div}[(c\lambda_\epsilon + r_1\lambda_n) \operatorname{grad} p_\epsilon] - \right. \\ & - \operatorname{div}[r_1\lambda_n \operatorname{grad} p_k] - \operatorname{div}[(c\lambda_\epsilon + r_1\lambda_n)] + \sum_{e=1}^{n_1} cQ_{e\epsilon}^H(t) \delta(x - x_\epsilon^H, y - y_\epsilon^H) + \\ & \left. + \sum_{l=1}^{n_2} (cQ_{l\epsilon}^3(t) + r_1Q_{lh}^3(t)) \delta(x - x_l^3, y - y_l^3) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial t} = \frac{1}{ms} & \left\{ \left[\operatorname{div}(D_p \operatorname{grad} b) \right] - \frac{\partial [mr_2(1-s) + a_p]}{\partial t} - b \frac{\partial ms}{\partial t} - \operatorname{div}[(b\lambda_\epsilon + r_2\lambda_n) \operatorname{grad} p_\epsilon] - \right. \\ & - \operatorname{div}[r_2\lambda_n \operatorname{grad} p_k] - \operatorname{div}[(b\lambda_\epsilon + r_2\lambda_n)] + \sum_{e=1}^{n_1} bQ_{e\epsilon}^H(t) \delta(x - x_\epsilon^H, y - y_\epsilon^H) + \\ & \left. + \sum_{l=1}^{n_2} (bQ_{l\epsilon}^3(t) + r_2Q_{lh}^3(t)) \delta(x - x_l^3, y - y_l^3) \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

Burada

$$\lambda_{n_\epsilon} = \lambda_\epsilon + \lambda_n, \quad -k \frac{f_\epsilon(s, b, c)}{\mu_\epsilon(p, b, c)} = \lambda_\epsilon, \quad -k \frac{f_n(s, b, c)}{\mu_n(p, b, c)} = \lambda_n, \quad G_\epsilon \lambda_\epsilon + G_n \lambda_n = \lambda_w.$$

qəbul olunmuşdur.

Ədədi həll sxemi

p_ϵ, s, c və b -ni təyin etmək üçün fəza və zamana görə $\omega = \omega_x \cdot \omega_y \cdot \omega_t$ sonlu fərqlər şəbəkəsi daxil edək

$$\omega_x = \left\{ x_i, i = \overline{0, N_x}; x_0 = 0, x_{N_x} = L_x, x_{i-1} \leq x_i \leq x_{i+1}, i = \overline{1, N_{x-1}} \right\}$$

$$\omega_y = \left\{ y_j, j = \overline{0, N_y}; y_0 = 0, y_{N_y} = L_y, y_{j-1} \leq y_j \leq y_{j+1}, j = \overline{1, N_{y-1}} \right\}$$

$$\omega_t = \left\{ t_n = n\Delta\tau, n = 0, 1, 2, \dots, t_0 = 0, t_{n+1} \geq t_n \right\}$$

və (8)-(11) tənliklər sisteminə və (6), (7) başlanğıc, sərhəd şərtinə integral-İnterpolyasiya üsulunu qeyri-müntəzəm $\omega = \omega_x \cdot \omega_y \cdot \omega_t$ şəbəkəsində tətbiq etməklə aşağıdakı şəkildə birinci tərtib konservativ sonlu-fərqlər sxemi alınır:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x_i} \left[\lambda_{n\epsilon\epsilon+1/2, j}^{n+1} \frac{P_{\epsilon i+1, j}^{n+1} - P_{\epsilon i, j}^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} - \lambda_{n\epsilon\epsilon-1/2, j}^{n+1} \frac{P_{\epsilon i, j}^{n+1} - P_{\epsilon i-1, j}^{n+1}}{x_i - x_{i-1}} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta y_j} \left[\lambda_{n\epsilon\epsilon, j+1/2}^{n+1} \frac{P_{\epsilon i, j+1}^{n+1} - P_{\epsilon i, j}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - \lambda_{n\epsilon\epsilon, j-1/2}^{n+1} \frac{P_{\epsilon i, j}^{n+1} - P_{\epsilon i, j-1}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Delta x_i} \left[\lambda_{ni+1/2,j}^{n+1} \frac{P_{ki+1,j}^{n+1} - P_{ki,j}^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} - \lambda_{ni-1/2,j}^{n+1} \frac{P_{ki,j}^{n+1} - P_{ki-1,j}^{n+1}}{x_e - x_{e-1}} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta y_j} \left[\lambda_{ni,j+1/2}^{n+1} \frac{P_{ki,j+1}^{n+1} - P_{ki,j}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - \lambda_{ni,j-1/2}^{n+1} \frac{P_{ki,j}^{n+1} - P_{ki,j-1}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta x_i} [\lambda_{wi+1,j}^{n+1} - \lambda_{wi,j}^{n+1}] + \frac{1}{\Delta y_j} [\lambda_{wi,j+1}^{n+1} - \lambda_{wi,j}^{n+1}] + \frac{1}{\Delta \tau} [m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n] = \\
& = \sum_{e=1}^{m_1} Q_{ee}^n(t_n) \bar{\delta}_{ei,j}^n + \sum_{l=1}^{m_2} (Q_{el}^o(t_n) + Q_{nl}^o(t_n)) \bar{\delta}_{ei,j}^o, \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n & + \frac{\Delta \tau}{m_{i,j}^n} \left\{ \frac{1}{\Delta x_i} \left[\lambda_{ei+1/2,j}^{n+1} \frac{P_{ei+1,j}^{n+1} - P_{ei,j}^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} - \right. \right. \\
& - \left. \lambda_{ei-1/2,j}^{n+1} \frac{P_{ei,j}^{n+1} - P_{ei-1,j}^{n+1}}{x_i - x_{i-1}} \right] + \frac{1}{\Delta y_j} \left[\lambda_{ei,j+1/2}^{n+1} \frac{P_{ei,j+1}^{n+1} - P_{ei,j}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - \right. \\
& - \left. \lambda_{ei,j-1/2,k}^{n+1} \frac{P_{ei,j}^{n+1} - P_{ei,j-1}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] + \frac{1}{\Delta x_i} [\lambda_{ei+1,j}^{n+1} G_{ei+1,j}^{n+1} - \lambda_{ei,j}^{n+1} G_{ei,j}^{n+1}] + \\
& + \frac{1}{\Delta y_j} [\lambda_{ei,j+1}^{n+1} G_{ei,j+1}^{n+1} - \lambda_{ei,j}^{n+1} G_{ei,j}^{n+1}] - s_{i,j}^n \frac{1}{\Delta \tau} [m_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n] + \\
& \left. + \sum_{e=1}^{n_1} Q_{ee}^n(t_n) \bar{\delta}_{ei,j}^n \right\}, \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{i,j}^{n+1} = c_{i,j}^n & + \frac{\Delta \tau}{m_{i,j}^n s_{i,j}^n} \left\{ \frac{1}{\Delta x_i} \left[D_{i+1/2,j}^{n+1} \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{x_{i+1} - x_i} - D_{i-1/2,j,k}^{n+1} \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{x_i - x_{i-1}} \right] + \right. \\
& + \frac{1}{\Delta y_j} \left[D_{i,j+1/2}^{n+1} \frac{c_{i,j+1}^n - c_{i,j}^n}{y_{j+1} - y_j} - D_{i,j-1/2}^{n+1} \frac{c_{i,j}^n - c_{i,j-1}^n}{y_j - y_{j-1}} \right] + \\
& - \frac{1}{\Delta \tau} \{ m_{i,j}^{n+1} r_{li,j}^{n+1} (1 - s_{i,j}^{n+1}) + a_{si,j}^{n+1} - m_{i,j}^n r_{li,j}^n (1 - s_{i,j}^n) - a_{si,j}^n \} - c_{i,j}^n \frac{1}{\Delta \tau} [m_{i,j}^{n+1} s_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^n s_{i,j}^n] - \\
& - \frac{1}{\Delta x_i} \left[(c_{i+1/2,j}^n \lambda_{ei+1/2,j}^{n+1} + r_{li+1/2,j}^n \lambda_{ni+1/2,j}^{n+1}) \frac{P_{ei+1,j}^{n+1} - P_{ei,j}^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (c_{i-1/2,j}^n \lambda_{ei-1/2,j}^{n+1} + r_{1i-1/2,j}^n \lambda_{ni-1/2,j}^{n+1}) \frac{P_{ei,j}^{n+1} - P_{ei-1,j}^{n+1}}{x_i - x_{i-1}} \Big] - \\
& - \frac{1}{\Delta y_j} \left[(c_{i,j+1/2}^n \lambda_{ei,j+1/2}^{n+1} + r_{1i,j+1/2}^n \lambda_{ni,j+1/2}^{n+1}) \frac{P_{ei,j+1}^{n+1} - P_{ei,j}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - \right. \\
& \quad \left. - (c_{i,j-1/2}^n \lambda_{ei,j-1/2}^{n+1} + r_{1i,j-1/2}^n \lambda_{ni,j-1/2}^{n+1}) \frac{P_{ei,j}^{n+1} - P_{ei,j-1}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] - \\
& - \frac{1}{\Delta x_i} \left[r_{1i+1/2,j}^n \lambda_{ni+1/2,j}^{n+1} \frac{P_{ki+1,j}^{n+1} - P_{ki,j}^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} - r_{1i-1/2,j}^n \lambda_{ni-1/2,j}^{n+1} \frac{P_{ki,j}^{n+1} - P_{ki-1,j}^{n+1}}{x_i - x_{i-1}} \right] - \\
& - \frac{1}{\Delta y_j} \left[r_{1i,j+1/2}^n \lambda_{ni,j+1/2}^{n+1} \frac{P_{ki,j+1}^{n+1} - P_{ki,j}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - r_{1i,j-1/2}^n \lambda_{ni,j-1/2}^{n+1} \frac{P_{ki,j}^{n+1} - P_{ki,j-1}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] - \\
& - \frac{1}{\Delta x_i} \left[(c_{i+1,j}^n \lambda_{ei+1,j}^{n+1} + r_{1i+1,j}^n \lambda_{ni+1,j}^{n+1}) - (c_{i,j}^n \lambda_{ei,j}^{n+1} + r_{1i,j}^n \lambda_{ni,j}^{n+1}) \right] - \\
& - \frac{1}{\Delta y_j} \left[(c_{i,j+1}^n \lambda_{ei,j+1}^{n+1} + r_{1i,j+1}^n \lambda_{ni,j+1}^{n+1}) - (c_{i,j}^n \lambda_{ei,j}^{n+1} + r_{1i,j}^n \lambda_{ni,j}^{n+1}) \right] + \\
& + \left. \sum_{e=1}^{m_1} c_{i,j}^n \mathcal{Q}_{ee}^n(t_n) \bar{\delta}_{ei,j}^n + \sum_{l=1}^{m_2} (c_{i,j}^n \mathcal{Q}_{ei}^n(t_n) + r_{1i,j}^n \mathcal{Q}_{lu}^n(t_n)) \bar{\delta}_{ei,j}^n \right\}, \tag{14} \\
& b_{i,j}^{n+1} = b_{i,j}^n + \frac{\Delta \tau}{m_{i,j}^n s_{i,j}^n} \left\{ \frac{1}{\Delta x_i} \left[D_{i+1/2,j}^{n+1} \frac{b_{i+1,j}^n - b_{i,j}^n}{x_{i+1} - x_i} - D_{i-1/2,j,k}^{n+1} \frac{b_{i,j}^n - b_{i-1,j}^n}{x_i - x_{i-1}} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\Delta y_j} \left[D_{i,j+1/2}^{n+1} \frac{b_{i,j+1}^n - b_{i,j}^n}{y_{j+1} - y_j} - D_{i,j-1/2}^{n+1} \frac{b_{i,j}^n - b_{i,j-1}^n}{y_j - y_{j-1}} \right] + \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\Delta \tau} \left[m_{i,j}^{n+1} r_{2i,j}^n (1 - s_{i,j}^{n+1}) + a_{si,j}^n - m_{i,j}^n r_{2i,j}^n (1 - s_{i,j}^n) - a_{si,j}^n \right] - b_{i,j}^n \frac{1}{\Delta \tau} \left[m_{i,j}^{n+1} s_{i,j}^{n+1} - m_{i,j}^n s_{i,j}^n \right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\Delta x_i} \left[(b_{i+1/2,j}^n \lambda_{ei+1/2,j}^{n+1} + r_{2i+1/2,j}^n \lambda_{ni+1/2,j}^{n+1}) \frac{P_{ei+1,j}^{n+1} - P_{ei,j}^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (b_{i-1/2,j}^n \lambda_{ei-1/2,j}^{n+1} + r_{2i-1/2,j}^n \lambda_{ni-1/2,j}^{n+1}) \frac{P_{ei,j}^{n+1} - P_{ei-1,j}^{n+1}}{x_i - x_{i-1}} \right] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\Delta y_j} \left[(b_{i,j+1/2}^n \lambda_{ei,j+1/2}^{n+1} + r_{2i,j+1/2}^n \lambda_{ni,j+1/2}^{n+1}) \frac{p_{ei,j+1}^{n+1} - p_{ei,j}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - \right. \\
& \quad \left. - (b_{i,j-1/2}^n \lambda_{ei,j-1/2}^{n+1} + r_{2i,j-1/2}^n \lambda_{ni,j-1/2}^{n+1}) \frac{p_{ei,j}^{n+1} - p_{ei,j-1}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] - \\
& -\frac{1}{\Delta x_i} \left[r_{2i+1/2,j}^n \lambda_{ni+1/2,j}^{n+1} \frac{p_{ki+1,j}^{n+1} - p_{ki,j}^{n+1}}{x_{i+1} - x_i} - r_{2i-1/2,j}^n \lambda_{ni-1/2,j}^{n+1} \frac{p_{ki,j}^{n+1} - p_{ki-1,j}^{n+1}}{x_i - x_{i-1}} \right] - \\
& -\frac{1}{\Delta y_j} \left[r_{2i,j+1/2}^n \lambda_{ni,j+1/2}^{n+1} \frac{p_{ki,j+1}^{n+1} - p_{ki,j}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - r_{2i,j-1/2}^n \lambda_{ni,j-1/2}^{n+1} \frac{p_{ki,j}^{n+1} - p_{ki,j-1}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] - \\
& -\frac{1}{\Delta x_i} \left[(b_{i+1,j}^n \lambda_{ei+1,j}^{n+1} + r_{2i+1,j}^n \lambda_{ni+1,j}^{n+1}) - (b_{i,j}^n \lambda_{ei,j}^{n+1} + r_{2i,j}^n \lambda_{ni,j}^{n+1}) \right] - \\
& -\frac{1}{\Delta y_j} \left[(b_{i,j+1}^{n+1} \lambda_{ei,j+1}^{n+1} + r_{2i,j+1}^{n+1} \lambda_{ni,j+1}^{n+1}) - (b_{i,j}^{n+1} \lambda_{ei,j}^{n+1} + r_{2i,j}^{n+1} \lambda_{ni,j}^{n+1}) \right] + \\
& + \left. \sum_{e=1}^{m_1} b_{i,j}^n Q_{ee}^n(t_n) \bar{\delta}_{ei,j}^n + \sum_{l=1}^{m_2} (b_{i,j}^n Q_{el}^n(t_n) + r_{2i,j}^n Q_{li}^n(t_n)) \bar{\delta}_{ei,j}^n \right\}, \quad (15)
\end{aligned}$$

$$s_{i,j}^0 = s_0(x_i, y_j), \quad c_{i,j}^0 = c_0(x_i, y_j), \quad b_{i,j}^0 = b_0(x_i, y_j) \quad (0 \leq i \leq N_x, \quad 0 \leq j \leq N), \quad (16)$$

$$p_{e1,j}^n = p_{e0,j}^n, \quad p_{eN_x,j}^n = p_{eN_x-1,j}^n; \quad p_{ei,1}^n = p_{ei,0}^n, \quad p_{ei,N_y}^n = p_{ei,N_y-1}^n;$$

$$b_{1,j}^n = b_{0,j}^n, \quad b_{N_x,j}^n = b_{N_x-1,j}^n, \quad b_{i,1}^n = b_{i,0}^n, \quad b_{i,N_y}^n = b_{i,N_y-1}^n,$$

$$c_{1,j}^n = c_{0,j}^n, \quad c_{N_x,j}^n = c_{N_x-1,j}^n, \quad c_{i,1}^n = c_{i,0}^n, \quad c_{i,N_y}^n = c_{i,N_y-1}^n, \quad (0 \leq i \leq N_x, \quad 0 \leq j \leq N_y). \quad (17)$$

Burada

$$\bar{\delta}_{ei,j}^n = \begin{cases} 0, & x_i \neq x_e^n, y_j \neq y_e^n \\ 1, & x_i = x_e^n, y_j = y_e^n \end{cases}; \quad \bar{\delta}_{li,j}^n = \begin{cases} 0, & x_i \neq x_l^n, y_j \neq y_l^n \\ 1, & x_i = x_l^n, y_j = y_l^n \end{cases}.$$

(12)-(17) sonlu fərqlər sxemi (8)-(11), (6)-(7) hidrodinamik məsələsinin həllini "təzyiqə görə qeyri-aşkar, su ilə doyma, duz və polimer konsentrasiyasına görə aşkar" şəkildə tapmağa imkan verir. Təzyiqə görə sonlu fərqlər sxemi iterasiyalı nöqtəvi Yakobi üsulu ilə, su doyma və su fazasında duz və polimer konsentrasiyasına görə isə Eyley üsulu ilə həll edilir [1].

Qalıq neftin polimer əsəşli məhlullarla sıxışdırılmasında neftveriminin proqnozu

Təklif olunan hesablama modelinə əsasən, neft hasilatının artırılması imkanlarının qiymətləndirməsi üçün neftin su ilə sıxışdırılmasının baza variantı

ilə müqayisədə neftin polimer əsaslı məhlullar ilə sıxışdırılmasının test hesablamaları yerinə yetirilmişdir.

Laya polimer əsaslı məhlullarla təsiretmə üsulun effektivliyinin qiymətləndirilməsi geoloji-fiziki şəraitə uyğunluğu özündə saxlayan “Bibiheybət-neft” NQÇİ –nin VLd-VL horizontu üzrə sahədə aparılmışdır.

Sahənin mədən məlumatlarına görə hesablanmış ehtiyatların nəticəsi ilə çıxarılan neftin nəticəsinin müqayisəsi əsasən orada kifayət qədər qalığ neft ehtiyatlarının mövcudluğunu təsdiq edir.

Bununla əlaqədar olaraq sahə quyularının müəyyən müddət üçün neft və suya görə debitlərinin dəyişməsi dinamikası əsasında hidrodinamik modelin sahəyə adaptasiyası (sazlanması) aparılmış və nəticədə neft və suya görə nisbi faza keçiricilikləri funksiyaları identifikasiya olunmuşdur.

$$f_u(s) = \left(\frac{0.912 - s}{0.64} \right)^3, f_g(s, 0, 0.2) = \left(\frac{s - 0.17}{0.87} \right)^{2.73}$$

Hidrodinamik modelin sahəyə adaptasiyasından sonra texnoloji prosesinin tənzimlənməsi ilə neftveriminin artırılması imkanları proqnozlaşdırılmışdır.

Praktikada polimer qarışığının 0,4-dən 10 q/l-ə qədər konsentrasiyası tətbiq edilir. KMS polimerinin müxtəlif şəraitlərdə reoloji xassələrinin tədqiqi üçün 0,5; 1; 2; 3; 4 və 5 q/l konsentrasiyası qarışığından istifadə edilmişdir.

Beləliklə, özlülüyün temperaturdan asılılığını və polimerin lay suyu ilə qarşılıqlı təsir mexanizmini əsas götürərək sərbəst həcmli məhlullardakı polimerin LTS-sı agenti kimi tətbiqi üçün rəasional konsentrasiyası KMS üçün 5q/l seçilmişdir.

Verilmiş sahədə qeyd olunan məlumatları əsas tutaraq polimer əsaslı suvurmanın müxtəlif variantlarının hesablamaları aparılmış və bu zaman prosesin 10 il davamlı olaraq aparılması yerinə yetirilmişdir.

Variantların hesablama nəticələri cədvəl 1 və şəkil 1-də gətirilmişdir.

İşlənilmənin baza variantında (suvurmada) cəm neft hasilatı 86,066 min ton, polimer əsaslı məhlul ilə işlənilmədə isə maksimal cəm neft hasilatı 89,935 min ton və neftin çıxarılma əmsalının cari qiymət artımı 4,6% təşkil edir.

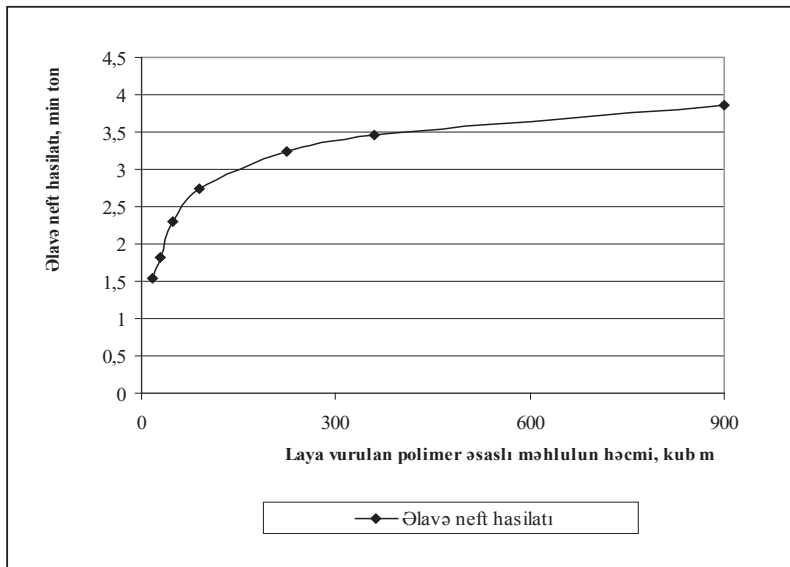
Cədvəl 1

Hesablama modelinin nəticələri

Variantlar	Hasil olunan neftin miqdarı, min ton	Cari neftin çıxarılma əmsalı	Baza variantı ilə müqayisədə NÇƏ-nin artımı, %	Əlavə neft hasilatı, min ton
Baza	86,066	0,1654	-	-
1.	87,599	0,169	2,18	1,533
2.	87,891	0,169021	2,19	1,825
3.	88,366	0,16994	2,75	2,3
4.	88,803	0,1708	3,3	2,737
5.	89,314	0,1718	3,87	3,244
6.	89,534	0,1722	4,2	3,468
7.	89,935	0,173	4,6	3,869

Əlavə neft hasilatının həcmi verilən lay hissəsinə 18 m³-dən 360 m³-ə qədər polimer əsaslı məhlul vurmada kəskin artır (şəkil 1). Eyni zamanda vurulan məhlulun həcmnin artması ilə əlavə neft hasilatı artır, lakin onun artımı vurulan məhlulun vahid həcmində kəskin azalır. Bununla əlaqədar baxılan lay hissəsində 360 m³ məhlulun vurucu quyuya birdəfəlik vurulmasının daha effektivli olması qəbul edilir (KMS əsaslı polimer məhlulun 5q/l konsentrasiyasında).

Polimer əsaslı məhlul vurmada gözlənilən effektin olmasını hasilat quyularında reaksiya olunan effektin qiymətləndirilməsi, yəni 1519, 2779 və 2781 sayılı quyularda sulaşmanın uyğun olaraq 73 % -dən 34% -ə, 70% -dən 29% -ə, 77 % -dən 36% -ə qədər enməsi və neft hasilatının isə 1,33; 1,24; 1,4 dəfə artması göstərir.



Şək. 1. Əlavə neft hasilatının laya vurulan polimer əsaslı məhlulun həcmindən asılılığı

Nəticə:

-polimer əsaslı məhlula daxil olan suyun minerallaşma dərəcəsini sahənin lay suyunun minerallıq dərəcəsinə nəzərən azaltmaqla sıxışdırılan məhsulda sulaşmasının məhdudlandırılması hesabına neftin daha çox çıxarılmasını təmin etmək olar.

-vurulan agentin axınını kollektorun su ilə yaxşı işlənmiş hissələrinə yönəltməklə həmin hissələrin bağlanması hesabına (tədris olunmanın hesabına) neft ehtiyatlarının tam sıxışdırılmasını təmin etməklə hasilatın intensivləşməsinə təmin etmək mümkündür.

ƏDƏBİYYAT

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем: Пер. с английского. М.: Недра, 1982, 407 с.

2. Алтунина Л.К., Кувшинов В.А. Физико-химические аспекты технологий увеличения нефтеотдачи: обзор//Химия в интересах устойчивого развития. 2001, № 9, с. 331–344.
3. Альварардо В., Манрик Э. Методы увеличения нефтеотдачи пластов. Планирование и стратегии применения. М.: Премиум Инжиниринг, 2011, 244 с.
4. Демахин С.А., Демахин А.Г. Селективные методы изоляции водопритока в нефтяные скважины. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2003, 164 с.
5. Методы извлечения остаточной нефти/М.Л. Сургучев, А.Т. Горбунов, Д.П. Забродин и др. М.: Недра, 1991, 347 с.
6. Применение коллоидных систем для увеличения нефтеотдачи пластов/О.Ю. Сладовская, Д.А. Куряшов, А.И. Лахова, Р.Р. Мингазов, И.Ф. Исмагилов, Б.Р. Вагапов//Вестник Казанского технологического университета. 2010, № 10, с. 585–591.
7. Сулейманов Б.А., Фейзуллаев Х.А. Моделирование изоляции водопритоков при разработке зонально-неоднородных нефтяных пластов// Изв. НАН Азерб., серия Наук о Земле, 2017, №1, с.72-81
8. Сургучев Л.М. Увеличение нефтеотдачи пластов: статус и перспективы. Материалы II Международного научного симпозиума. М., 2009, с. 62 – 69.
9. Хавкин А.Я. Нефтегазовые нанотехнологии – основа экономики XXI века//Нанотехнологии. Экология. Производство. 2013, № 2, с. 54–59.
10. Фейзуллаев Х.А., Халилов М.С., Кулиев Э.А., Магеррамов С.Д. Моделирование газового воздействия на газоконденсатный пласт на завершающей стадии разработки // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. М.: ОАО, ВИННОЭНГ, 2018, №8, с.48-52
11. Feyzullayev Kh.A., Khalilov M.S. Numerical modeling of the water-gas stimulation of gas-condensate stratum in the final stage of development. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, Minsk, 2019, pp.1214-1223 (перевод на английский язык) Springer
12. Халилов М.С. Разработки глубокозалегающих газоконденсатных залежей в режиме истощения. «Математическое моделирование процессов и систем»: Материалы IX Межд. науч.-практ. конф., 30 октября – 1 ноября 2019 г., г. Стерлитамак. Башкирский Государственный Университет- Институт Стратегических Исследований. г. Уфа (Россия), с.375-379
13. Alvarado V., Manrique E. Enhanced oil recovery: an update review//Energies. 2010, № 3, p. 1529-1575.

ОЦЕНИВАНИЯ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛИМЕРНОЙ НАНОСИСТЕМЫ В ДОБЫЧЕ НЕФТЕПРОДУКТОВ ИЗ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ НА ПОСЛЕДНЕМ ЭТАПЕ РАЗРАБОТКИ

М.С.ХАЛИЛОВ

РЕЗЮМЕ

Рассмотрено влияние полимера на слой глинистого нефтью. В пласте имеются нагнетательные и добывающие скважины. Приведено количество раствора полимера, закачанного в пласт в нагнетательных скважинах. В зависимости от состояния пласта требуется определить фазы, добываемые из эксплуатационных скважин, и другие технико-технологические параметры разработки в режиме процесса сжатия.

Ключевые слова: численные методы, нефть, полимер, нано частица, слой.

**EVALUATION OF POSSIBILITY OF APPLICATION OF POLYMER NANO
SYSTEMS IN PRODUCTION OF OIL PRODUCTS FROM OIL FIELDS
IN THE LAST STAGE OF DEVELOPMENT**

M.S.KHALILOV

SUMMARY

The effect of the polymer on the clay layer is considered. The formation has impermeable and extraction wells. Given the amount of polymer solution deposited in the formation in the oil wells. Depending on the state of the formation, it is necessary to determine the phases extracted from the operating wells, and other technical and technological parameters of the development in the compression process.

Keywords: numerical methods, oil, polymer, nanoparticle, layer.

УДК 004.056

**ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СТРУКТУРА СИСТЕМЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ
БЕЗОПАСНОСТИ ДЛЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ****Ф.П.АЛИЕВА***Бакинский Государственный Университет*
aaliyev@mail.ru

В статье предложена функциональная структура системы обеспечения безопасности. А также приведены основные функции, изложены принципы и порядки действия, описаны основные функциональные модули системы обеспечения безопасности.

Ключевые слова: система безопасности, система обеспечения безопасности, функции системы безопасности, модули системы безопасности

Методы и средства обеспечения безопасности объектов (ресурсов и компонентов) сети разделяют на локальные и сетевые средства защиты. Локальные средства обеспечения безопасности реализуются в составе абонентских систем, и предназначены для проверки прав доступа абонентов к ресурсам. Под сетевыми средствами понимают средства, обеспечивающие управление потоками защищаемых ресурсов и данных в сети, а также средства, выполняющие свои функции в тесном взаимодействии с процессами управления передачи данных [1-3].

Предполагается, что система обеспечения безопасности (СОБ) должна иметь, по крайней мере, одно средство для защиты объектов на каждом пути доступа к ним или проникновения в систему. Поэтому в концептуальной модели СОБ точно определяется каждая область сети, требующая защиты и оценивается эффективность средств защиты.

СОБ в компьютерной сети (КС) реализуется на высоком уровне эталонной модели и является самым верхним компонентом в системной иерархии. СОБ, как правило, состоит из нескольких модулей, которые выполняют следующие функции [3,4]:

- управление входом пользователей в систему (УВП);
- управление доступом к системе и ее ресурсам (УДС);
- учет и регистрация входов и обращений к системе (УРВ);
- аутентификация пользователя и сети (АПС);

- управление правами и полномочиями пользователей (УПП);
- непосредственная защита информации (НЗИ);
- генерация и распространение ключами (ГРК);
- обеспечение целостности (ОЦ);
- установление подлинности данных (УП);
- анализ состояния и контроля угроз (АС);
- отключение системы (ОС);
- реорганизация и реконфигурирования системы (РРС).

Каждый пользователь должен войти в систему через УВП, который выдает общую справку о системе. После чего пользователю предоставляется возможность представить свой ID и пароль (PSWD). После этого управление передается в УДС, который принимает от пользователя эти параметры и проверяет санкционирование доступа к системе и требуемым ресурсам. В случае обнаружения несанкционированного доступа (НСД) он выдает пользователю сообщение об отказе. При положительном результате управление передается в УРВ, который регистрирует все входы и обращения к системе и к ее ресурсам. В случае несанкционированного доступа регистрируется несанкционированное обращение к системе в журнале нарушений.

АПС с помощью дополнительной процедуры проводит аутентификацию и устанавливает подлинность пользователя. Кроме того, АПС позволяет пользователю определить подлинность сети или системы. Если не устанавливается подлинность пользователя и сети, то управление передается в УРВ, иначе - в УПП, которое получив управление, следит за работой пользователей. Для определения полномочий и привилегий используется двумерная матрица $A = \{a_{ij}\}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, где n - количество пользователей, m - количество ресурсов сети. Коэффициент, который стоит на пересечении строки i и столбца j , определяет категории доступа i -го пользователя j -му ресурсу.

НЗИ защищает данные от несанкционированного использования, как при хранении, так и при передаче, для чего используются криптографические и стенографические методы. Каждый раз при передаче по сети или при любом криптографическом сокрытии информации управление передается в НЗИ.

Передача информации производится по специальному протоколу СОБ, согласно которому каждый пользователь имеет два ключа - один открытый, другой секретный. Открытый ключ печатается открыто и используется другими пользователями для шифрования информации, которая предназначена для данного пользователя. Секретный ключ известен только пользователю - владельцу и используется для расшифровки. Ключи генерируются и сохраняются в центре распределения ключей (ЦРК).

Работа ЦРК регулируется ГРК, который кроме генерации и сохранения ключей, также выполняет функции замены устаревших ключей, обмен ключами между пользователями, передача ключей пользователям из ЦРК.

УП получает управление из НЗИ и ГРК, которое обеспечивает проверку целостности и подлинности информации. В положительном случае к НЗИ и ГРК возвращается удовлетворительное сообщение, и они продолжают свою работу, в обратном случае выдается сообщение о нарушении.

Функции АС распадаются на несколько направлений: диагностика, обеспечение надежного функционирования, выявление угроз и нарушений. Первая часть запускается в случае появления любого сообщения о НСД в систему или к ее ресурсам, о нарушении и т.д. Ведутся диагностика контроля входов пользователей в систему, таблицы полномочий и привилегий. Вторая часть, т.е. подсистема обеспечения надежного функционирования, контролирует все модули и процедуры системы безопасности. В случае отказа какого-либо элемента системы безопасности, выдается сообщение администратору СОБ и по необходимости передается управление в модуль РРС. Третья часть проводит мероприятия для выявления угроз и нарушений. Она запускается периодически и выполняет тестовую процедуру, которая проверяет все узлы системы безопасности, протокол обмена ключами и ЦРК. При выявлении угрозы неавторизованного доступа к ресурсам системы, обнаружении нарушения прав и полномочий пользователей предупреждается администратор СОБ, и управление передается в ОС.

ОС получает управление при выявлении нарушения любого вида. Функция ОС заключается в прекращении работы системы, восстановлении системы после нарушения в случае нанесения ей ущерба, устранении ущерба, очистки памяти от "мусора". После выявления уязвимых мест системы управление передается в РРС.

РРС, получая управление в человеко-машинном режиме под управлением администратора СОБ, начинает изменять конфигурацию системы безопасности. РРС может исключать любой отказавший работать модуль или поменять на другой, добавить новый и т.д.

Функциональные модули СОБ

Безопасность ресурсов в компьютерных сетях обеспечивается выполнением общепринятых процедур и средств защиты, которые являются составной частью СОБ [4-6]. Ниже рассматриваются эти модули (рис.1).

Модуль управления доступом – выполняет функции такие, как идентификация пользователя, регистрация обращений к системе, выдача

немедленных сообщений о нарушениях ответственному оператору - "доверенному терминалу", ограничение доступа к ресурсам и операционной системе, установление подлинности пользователя и сети. Он обеспечивает безопасность информации, ограждая ее от НСД, неавторизованного использования программных продуктов и прав других пользователей.

Посредством процедуры идентификации, каждому пользователю, терминалу, ресурсам, файлам, программам или другим объектам присваивается конкретный уникальный идентификатор, которому, по возможности, сопоставляются контрольные числа, пароль или другие средства контроля с целью минимизации шансов ошибочной идентификации. Использование идентификатора и пароля необходимо не только для опознавания, но и для учета обращений.

Процедура регистрации обращений к системе может помочь определять очаг или причину утечки. Если в системе требуется определенная степень безопасности, то использование идентификации без дополнительных процедур установления подлинности недопустимо.

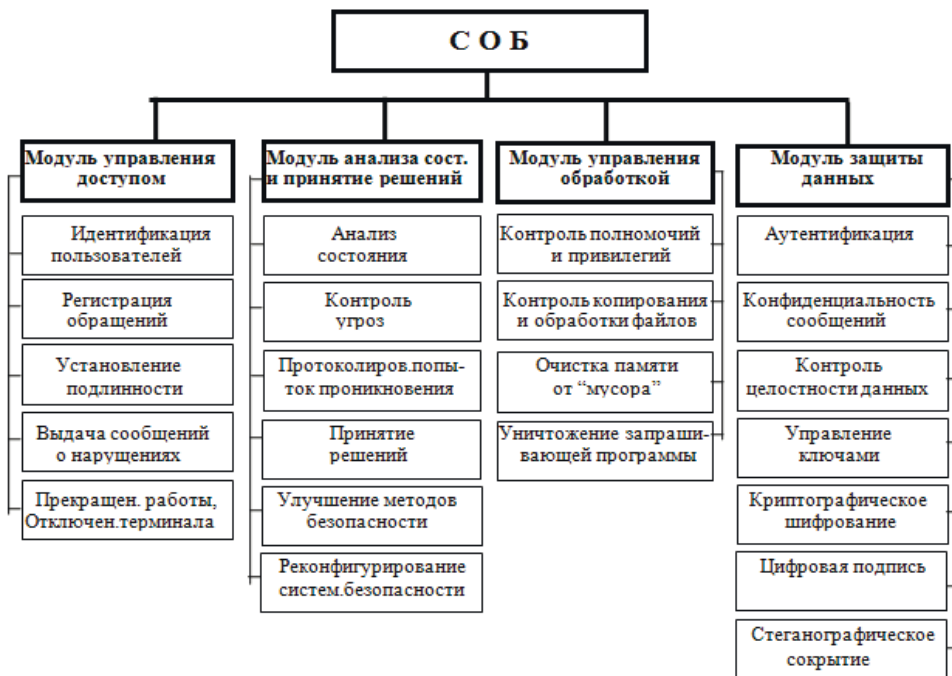


Рис.1. Функциональные модули СОБ

Система идентификации служит базой для процедуры установления подлинности. Установление подлинности заключается в том, чтобы выявить является ли объект тем, за кого себя выдает. Может быть затребована информация различного характера, прежде чем подлинность будет признана установленной. В случаях необходимости обеспечения высокой

степени безопасности может потребоваться периодическая перепроверка в определенных условиях. Для установления подлинности пользователей используются пароли и другие диалоговые методы.

Систему пароля можно использовать и для установления подлинности сети, когда он желает взаимодействовать с данной системой.

При попытке проникновения в систему или нарушения прав доступа выдается сообщение об этом инциденте на терминал ответственного оператора или "доверенному терминалу" и владельцу информации. Процедуру модуля управления доступом показана на рис.2.

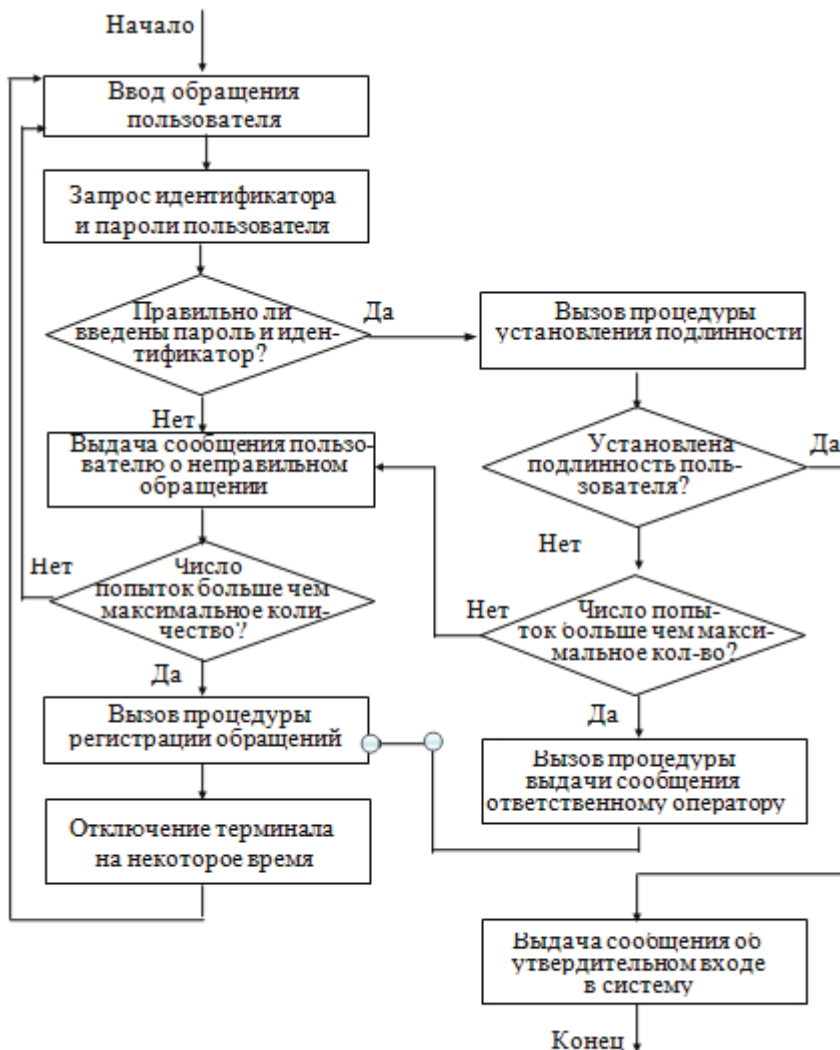


Рис.2. Процедуры модуля управления доступом

Модуль управления обработкой информации. Если методы ограничения доступа не останавливают нарушителя, то он, проникая в систему, может извлечь, изменить или уничтожить информацию в файлах. Процедура контроля обработки позволяет ввести ограничения на обработку файлов, содержащих важную информацию. Файлы на запоминающем устройстве имеют ограничения на чтение, изменение, выполнение. Так, например, какие-то пользователи могут иметь разрешение на чтение, но не иметь разрешения на изменение.

Аналогичным образом можно ввести ограничения на использование любого информационного ресурса (файла, каталога, диска, программы, базы данных и т.д.). Рассмотрим процедуру управления полномочиями и привилегиями, которая содержит двухмерную матрицу категорий доступа $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1, n$ и $j = 1, m$. Строки матрицы указывают на абонентов, а столбцы на ресурсы сети. Пересечение строки i и столбца j определяет категорию доступа i -го абонента j -му ресурсу. На основе этой матрицы определяется привилегия пользователей, которая может быть изменена с разрешения администратора сети и владельца ресурса.

При неавторизованном запросе файлов, имеющих высокую степень секретности, срабатывает процедура уничтожения запрашивающей программы, которая ее уничтожает, разрывает связь и переходит в состояние "зависания". После завершения выполнения программы, обрабатывающей секретную информацию, которая запрошена законным (авторизованным) пользователем, данные остаются в оперативной памяти, на диске, на ленте и т.д. и злоумышленник может использовать их для своей цели. Поэтому в СОБ включена процедура очистки памяти от остатка и "мусора".

Модуль защиты данных. Когда нарушитель обходит ограничения доступа и контроля обработки, он имеет НСД к данным. В этом случае самый надежный способ предотвращения НСД к данным - это использование криптосистем и применение протоколов безопасности. Имеющийся в СОБ модуль криптографической защиты данных включает в себя процедуры аутентификации, контроля целостности данных, обеспечения секретности обращения и криптографических преобразований для закрытия открытой информации, управления ключами.

Процедура аутентификации выполняет функции установления подлинности информации, пользователя и сети. Аутентификация является жизненно важным вопросом для всех абонентов как коммерческих, так и секретных систем связи. Установление подлинности пользователя означает, что отправитель информации должен заверять свою подпись, т.е. подтвердить, что информация была послана именно тем пользователем, кем была идентифицирована. Установление подлинности сети - это проблема обратная предыдущей, т.е. пользователь определяет, что он имеет

дело с той сетью, которая его интересует. Злоумышленник может выдать себя за пользователя, от чьего имени формирует сообщение, так и за сеть, и, получив информацию, использует ее в своих целях. Получатель требует утверждения подлинности полученной информации, так как она могла быть изменена при передаче по каналу связи.

Процедура контроля целостности управляет средствами обеспечения целостности данных. Эта процедура определяет идентичность информации исходного вида и включает методы обеспечения целостности данных при передаче или хранении информации на носителях.

Криптографические методы шифрования используются для сокрытия смысла открытой информации и обеспечения надежной безопасности от НСД. Злоумышленник, имеющий доступ к данным, должен приложить немало усилий для раскрытия исходного варианта, а это иногда практически невозможно. В настоящее время существует много криптографических систем с большой стойкостью. Среди них особое место занимают Data Encryption Standart (DES) и криптоалгоритм RSA.

Известно, что для аутентификации и криптографического преобразования используются ключи. Проблема распределения или передачи ключей - одна из главных проблем в системе безопасности. Организация ЦРК или применение протоколов обмена ключами выполняется процедурой управления ключами.

Модуль контроля угроз, анализа состояний и принятия решений занимает основное место в СОБ. Контроль угроз применяется для обнаружения фактов нарушений, попыток проникновения в систему или НСД к данным и обеспечения своевременной реакции на эти факты. Контроль угроз должен включать фиксацию всех исключенных попыток проникновения в систему или к данным, использование неавторизованных процедур, одним словом, любое нарушение политики безопасности.

Любое действие в КС меняет ее состояние. Поэтому состояние КС всегда держится под контролем, выявляются слабости в конфигурации и определяются уязвимые места в средствах защиты. Для анализа состояния протоколируются попытки нарушения, и ведется экспертный анализ. По необходимости принимаются решения о дальнейших действиях: изменение методов защиты или изменение конфигурации КС.

Так как система защиты данных является сложной распределенной системой, то управлять ею можно с помощью методов и средств искусственного интеллекта. При функционировании средств защиты данных можно выделить быстропротекающие процессы (образование и рассасывание очередей в служебных базах данных при проверке привилегий доступа к ресурсам системы), медленные процессы (изменение интенсивности потока запросов на реализацию защитных функций), а также очень

медленные процессы (старение ключей и паролей), отслеживание и анализ протекания которых являются функциями экспертной системы. Структура системы принятия решений по управлению средствами обеспечения безопасности данных содержит функциональные компоненты, которые позволяют автоматизировать и ускорить реакцию при выявлении нарушений в системе.

Подсистема функционального контроля СОБ формирует и посылает в КС тестовые команды для проверки правильности работы средств защиты. Результаты проверок собираются этой же подсистемой в реальном масштабе времени, что обеспечивает возможность оперативного реагирования на возникшие нарушения. Данные о результатах контроля, поступающие из КС, используются для обновления знаний о текущем состоянии КС защиты и в совокупности с предыдущими знаниями служат основой для выработки необходимых управляющих воздействий. Преобразование поступающей информации в форму представления в базе знаний (БЗ) и формирование исходных данных для моделирования работы системы защиты, выполняются подсистемой интерпретации результатов.

Блок логического вывода предназначен для определения типа управляющего воздействия, элементов КС и средств защиты, с помощью которых можно предотвратить или компенсировать возникающие нарушения в сети. При выявлении ситуаций нарушения, которые могут привести к утечке, потере или подмене информации в сети, для обнаружения и локализации места попыток НСД или определения канала утечки информации может использоваться теория нечетких множеств. Для выполнения функций процедуры принятия решений на основе теории нечетких множеств и искусственного интеллекта используется экспертная система (ЭС), которая постоянно контролирует состояние СОБ, дополняет БЗ полученными новыми данными в результате проверок в реальном масштабе времени и делает логический вывод. При обнаружении нарушения прав доступа или полномочий, при определении слабых мест в системе, уязвимости методов шифрования или протокола обмена информацией и в других подобных случаях выдаются управляющие команды и сообщения ответственному оператору. Эти команды могут быть такими, как: немедленно прекратить сеанс, отключить отказавший узел системы, заменить средства защиты, протоколы общения и ключи абонентов и т.д. Таким образом, ЭС может улучшать качество функционирования СОБ в ходе работы. Имеющийся блок самоадаптации по результатам логического вывода меняет параметры системы, чтобы увеличить надежность и обеспечить модульность СОБ. Под модульностью здесь понимается недопустимость утечки информации в случае отказа какого-либо элемента системы.

В процессе управления обеспечением безопасности оператору посылаются сообщения с помощью блока объяснений и диалогового процессора. Ответственный оператор имеет право вмешиваться в процесс управления на любом этапе и ввести управляющие директивы. Все действия оператора должны регистрироваться в БЗ и могут анализироваться с помощью ЭС.

Заключение

Таким образом, в работе рассматриваются проблемы системы обеспечения безопасности для компьютерных сетей. Предложена функциональная структура системы обеспечения безопасности. Приведены основные функции, изложены принципы и порядки действия системы обеспечения безопасности. Более подробно описаны основные функциональные модули системы обеспечения безопасности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биячуев Т.А. Безопасность корпоративных сетей. Учебное пособие.// Санкт-Петербург. СПб ГУ ИТМО, 2004, 161 с.
2. Ярочкин В.И. Информационная безопасность. М.: Трикта, 2005, 544 с.
3. Аббасов А.М., Алгулиев Р.М., Касумов В.А. Проблемы информационной безопасности в компьютерных сетях. Монография. Баку: Элм, 1998, 235 с.
4. Qasimov V.Ə. İnformasiya təhlükəsizliyinin əsasları. Dərslük. Bakı. MTN-in nəşriyyat-poliqrafiya mərkəzi. 2009, 340 s.
5. Касумов В.А., Мамедов С.З. Разработка эффективной структуры системы безопасности информации для корпоративных компьютерных сетей. // Наукові праці Одеська національна академія зв'язку ім. О.С.Попова, 2007, № 2. стр.70-73.
6. Gasimov V.A., Amashov Y.A., Aliyeva F.P., Mustafayeva E.A., Mutin D.I. Bolnokin V.E. Development of the information security system effective structure for the distributed computer networks. // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. Vol. 537, IOP Publishing. 2019. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/537/5/052034/pdf>.

KOMPÜTER ŞƏBƏKƏLƏRİ ÜÇÜN TƏHLÜKƏSİZLİYİN TƏMİN EDİLMƏSİ SİSTEMİNİN FUNKSİONAL STRUKTURU

F.P.ƏLİYEVA

XÜLASƏ

Məqalədə təhlükəsizliyin təmin edilməsi sisteminin funksional strukturu təklif olunmuşdur. Həmçinin təhlükəsizliyin təmin edilməsi sisteminin əsas funksiyaları, prinsipləri və yerinə yetirilmə ardıcılıqları verilmiş, əsas funksional modulları təsvir olunmuşdur.

Açar sözlər: təhlükəsizlik sistemi, təhlükəsizliyin təmin edilməsi sistemi, təhlükəsizlik sisteminin funksiyaları, təhlükəsizlik sisteminin modulları

FUNCTIONAL STRUCTURE OF A SECURITY SYSTEM FOR COMPUTER NETWORKS

F.P.ALIYEVA

SUMMARY

The article offers a functional structure of the security system. Also provides the main functions, principles and procedures of action, describes the main functional modules of the security system.

Keywords. security system, security assurance system, security system functions, security system modules

FİZİKA

УДК 621.38

**НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТ ПОГЛОЩЕНИЯ
И ПОКАЗАТЕЛЬ ПРЕЛОМЛЕНИЯ
В GaSe ПРИ ЛАЗЕРНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ****А.Г.КЯЗЫМ-ЗАДЕ*, В.М.САЛМАНОВ*, А.Г.ГУСЕЙНОВ*,
А.А.САЛМАНОВА**, Р.М.МАМЕДОВ*, Ф.Ш.АХМЕДОВА****** Бакинский Государственный Университет****² Азербайджанский Государственный Университет****Нефти и Промышленности****vagif_salmanov@yahoo.com**

Экспериментально исследованы нелинейные оптические свойства кристаллов GaSe при высоких уровнях оптического возбуждения. В качестве источника излучения были использованы Nd:YAG лазер (2-я гармоника, $\lambda=532$ нм) и жидкостной лазер (область перестройки длин волн излучения 594-643 нм). Показано, что при высоких уровнях оптического возбуждения край полосы поглощения сдвигается в сторону более низких энергий (красное смещение). Величину и знак нелинейного коэффициента поглощения и показателя преломления измеряли с использованием метода z-сканирования. Показано, что наблюдаемые особенности в спектрах поглощения и показателя преломления обусловлены безызлучательной рекомбинацией электронно-дырочных пар, генерированных лазерным излучением, которые передают свою энергию кристаллу посредством фононного излучения, что приводит к нагреву решетки.

Ключевые слова: GaSe, лазер, нелинейное поглощение, метод z -сканирования.

Известно, что физические свойства полупроводников в сильной степени зависят от влияния на них внешних воздействий: давление, температура, электрическое поле, легирование и т.д. [1-3]. Эти и другие факторы по-разному влияют на край полосы поглощения. При всестороннем сжатию кристалла, обеспечиваемом так называемым гидростатическим давлением, расстояние между его атомами уменьшается. Но уменьшение межатомного расстояния вызывает увеличение ширины запрещенной зоны. С повышением температуры происходят расширение решетки и усиление колебаний атомов относительно положений равновесия. За исключением некоторых полупроводников (CuCl, PbS,...) рост температуры приводит к уменьшению ширины запрещенной зоны. Электрическое поле

приводит к эффективному уширению всех уровней и низкоэнергетический сдвиг края полосы поглощения (эффект Франца-Келдыша). Красное смещение края полосы поглощения приводит к увеличению оптического поглощения при энергиях меньше, чем ширина запрещенной зоны. В вырожденном (сильно легированном) полупроводнике край полосы поглощения находится при гораздо больших энергиях, чем в собственном материале (эффект Бурштейна-Мосса). Объяснение этого эффекта, заключается в том, что благодаря достаточно низкой плотности состояний в зоне проводимости относительно малое число электронов может заполнить эту зону, что будет влиять на край поглощения. Другими словами, многие состояния вблизи дна зоны проводимости уже заполнены и поэтому не могут принимать электроны, оптически возбуждаемые из валентной зоны.

Взаимодействие световых волн большой мощности и высокой монохроматичности с веществом, привело к возникновению новой области физики – нелинейной оптики, в результате которой расширились возможности влияния лазерного излучения на оптические свойства полупроводников. В качестве примера можно привести заполнение зон в полупроводнике под действием лазерного излучения (Bandfilling effect) [4]. Электроны и дырки, как фермионы подчиняются принципу Паули, на каждом энергетическом уровне зоны, который определяется волновым вектором k , может находиться не более двух электронов с противоположно направленными спинами. Занятое состояние больше не доступно как конечное состояние в процессе оптического поглощения. Из-за принципа минимизации энергии, носители в квазиравновесном состоянии занимают доступные состояния из нижней части зоны, так что энергетически самые низкие состояния заняты первыми. Это приводит к заполнению состояний вблизи дна зоны проводимости электронами, а в верхней части валентной зоны - дырками. Таким способом заполнение зон приводит к просветлению края полосы поглощения и его сдвиг в высокоэнергетическую область спектра.

Кристаллы GaSe являются весьма перспективными материалами для проведения такого сорта экспериментов. Благодаря слоистой структуре, высокой поляризуемости, оптической однородности и естественным зеркальным поверхностям, кристаллы GaSe нашли широкое применение в оптоэлектронике и в них обнаружены такие эффекты как: генерация гармоник [5, 6], параметрическая генерация света [7, 8], оптическая бистабильность [9], многофотонное поглощение [10], электронно-дырочная плазма [11-15], вынужденное излучение [16-20] и т.д.

В настоящее время для измерения нелинейных оптических параметров полупроводников применяются различные экспериментальные методы: памп-проб спектроскопия (pump-probe spectroscopy) [4], нелинейная интерферометрия (optical interferometry) [21], четырехволновое

смешение (four-wave mixing) [22], трехволновое смешение (three-wave mixing) [23], нелинейное пропускание (nonlinear transmission measurement) [24], лучевая дисторсия, так называемый метод z-сканирования (beam-distortion technique, referred to as a z-scan) [25] и Моир дефлектометрия (Moire deflectometry) [26]. В данной работе нелинейный коэффициент поглощения и коэффициент преломления кристаллов GaSe были измерены простым однолучевым методом, называемым методом z-сканирования.

Методика эксперимента

Исследованные кристаллы GaSe были выращены методом Бриджмена. Образцы относились к ϵ -модификации, имели гексагональную структуру и обладали р-типом проводимости. Структура этих кристаллов состоит из последовательно упакованных слоев, каждый из которых содержит четыре плотно связанных атомных плоскости Se-Ga-Ga-Se [27]. Связь между двумя соседними слоями имеет тип Ван-дер-Ваальса, в то время как внутри слоя связь преимущественно ковалентная. Образцы с толщинами ~ 20 -100 мкм были изготовлены путем скалывания из крупных слитков (перпендикулярно оптической оси «с»). Согласно холловским измерениям, удельное сопротивление, концентрация и подвижность неравновесных носителей тока составляли $\rho=(10^3$ - $10^5)$ Ом·см, $p\approx 1\cdot 10^{14}$ см $^{-3}$, $\mu\approx(20$ -30) см 2 ·В $^{-1}$ ·сек $^{-1}$. При комнатной температуре ширина запрещенной зоны GaSe равна $E_g = 2,02$ эВ.

Для определения нелинейного оптического поглощения и показателя преломления были использованы импульсные Nd:YAG лазер и жидкостной лазер на красителе. Оптическая геометрия эксперимента, используемая для измерения коэффициента нелинейного поглощения, показана на рис.1.

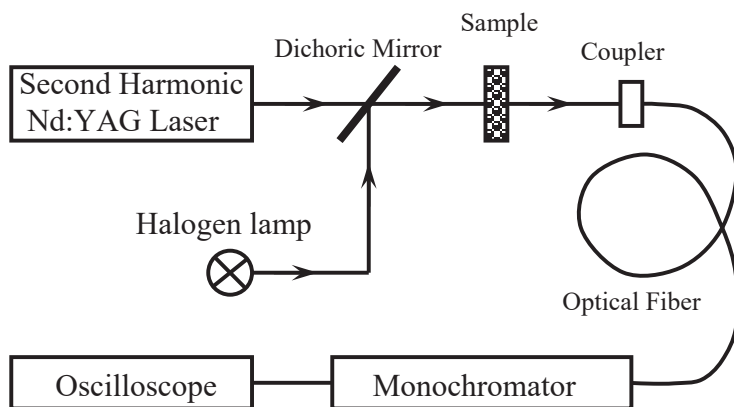


Рис.1. Экспериментальная установка для измерения коэффициента нелинейного поглощения в GaSe.

В эксперименте использовались два источника света. В качестве источника возбуждения использовалась вторая гармоника Nd:YAG лазера ($\lambda=532$ нм с частотой повторения 10 Гц, максимальной мощностью 12 МВт/см² и длительностью ~ 10 нс). Интенсивность лазерного излучения изменялась при помощи калиброванных световых фильтров. Для измерения пропускания образцов возбуждаемых лазерным излучением, вторым источником света служила галогенная лампа. Спектры оптического поглощения GaSe измерялись с использованием автоматического монохроматора M833 с двойной дисперсией (спектральное разрешение $\sim 0,024$ нм на длине волны 600 нм), с компьютерным управлением и детектором, регистрирующим излучение в диапазоне длин волн 350 - 2000 нм.

На рис.2 показана схема установки для эксперимента z-сканирования. В качестве источника возбуждения был использован жидкостной лазер на красителе Родамин 6G (PRA, LN-107) с накачкой на выходе лазера N₂ лазером (PRA, LN -1000). Область перестройки длины волны излучения (594-643) нм, с частотой повторения 20 Гц, максимальной мощностью 10 МВт/см² и длительностью импульса ~ 3 нс. Метод z-сканирования, использованный в работе, впервые введенный Шейхом-Бахом [25], хорошо известен и используется для изучения нелинейных свойств оптических материалов. Метод позволяет определить величину и знак нелинейного показателя преломления, а также двухфотонный коэффициент поглощения.

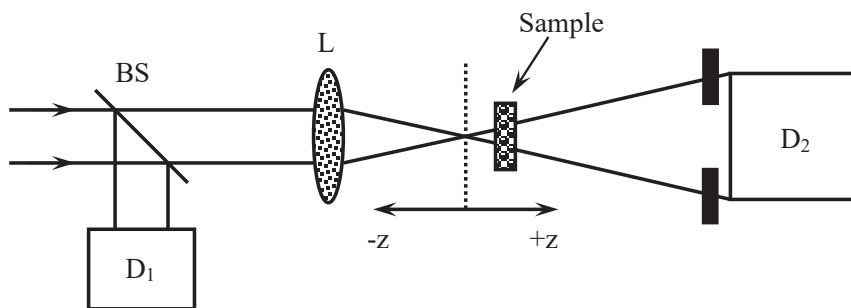


Рис. 2. Экспериментальная схема для техники z-сканирования. Положение образца относительно фокальной плоскости линзы изменяется и измеряется коэффициент пропускания.

Этот метод основан на использовании эффекта самофокусировки сходящегося гауссова пучка в образце с нелинейными оптическими свойствами. Метод определения нелинейных постоянных состоит в перемещении образца вдоль оптической оси вблизи фокуса линзы, используемого для формирования сходящегося гауссова пучка и измерения мощности

излучения, проходящего через образец. Метод z-сканирования с открытой апертурой используется для измерения коэффициента нелинейного поглощения. При перемещении образца вдоль оси z с переходом через фокус, зависимость общей интенсивности пропускания может быть измерена как функция положения образца. Для оценки нелинейного показателя преломления используется метод z-сканирования с закрытой апертурой. Поскольку из-за эффекта самофокусировки размер пятна в плоскости детектора изменяется, размещение диафрагмы конечной апертуры перед детектором обеспечивает измерение величины нелинейного показателя преломления. Как видно из рис.2, лазерный луч с гауссовым пространственным профилем луча направляется к образцу после прохождения через узкую фокусирующую линзу L. Количество света, прошедшего через образец, детектируется детектором D₂ через конечную апертуру, в то время как интенсивность падающего лазера определяется детектором D₁. Никакая дополнительная линза не используется после образца, так что профиль дальнего поля передаваемой интенсивности может быть измерен с помощью детектора D₂. Положение образца относительно фокальной плоскости линзы варьируется и в каждой позиции измеряется интенсивность пропускания лазера. Передаваемая интенсивность через апертуру как функция положения z связана с нелинейным показателем преломления.

Экспериментальные результаты и их обсуждение

Спектры поглощения GaSe при низкой ($\sim 0,1$ МВт/см², кривая 1) и высокой (~ 5 МВт/см², кривая 2) интенсивности возбуждения приведены на рис.3, а. Как видно из рисунка, при высоких уровнях возбуждения край полосы сдвигается в сторону более низких энергий (красное смещение). Изменение спектра поглощения показано на рис.3,б. Сдвиг спектра поглощения в сторону более низких энергий приводит к изменению показателя преломления.

Из соотношения Крамерса-Кронига [4] можно определить изменение показателя преломления при энергии фотона $\hbar\omega$ как:

$$\Delta n(\hbar\omega) = \frac{hc}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Delta\alpha(\hbar\omega')}{(\hbar\omega')^2 - (\hbar\omega)^2} d(\hbar\omega') \quad (1)$$

Используя уравнение (1) для расчета изменения показателя преломления, связанного с изменением поглощения на рис. 3.б, мы получаем результат, изображенный на рис.3,в. Как видно из рисунка, в этом случае индуцированное изменение показателя преломления является положительным ниже края полосы и отрицательным на стороне высоких энергий. Индуцированное лазером изменение отрицательного показателя преломления называется оптической нелинейностью с дефокусировкой. По-

положительное $\Delta n(\omega)$ на стороне низкой энергии соответствует оптической нелинейности с самофокусировкой. Причина такой терминологии заключается в том, что полупроводниковая среда ведет себя как линза, когда на нее падает лазерный луч с гауссовым пространственным профилем. На красной стороне края полосы с $\Delta n(\omega) > 0$ среда выступает в качестве положительной линзы. Лазерный луч с гауссовой формой имеет профиль интенсивности, такой, что интенсивность в центре больше, чем в стороне. Большая интенсивность в центре пучка вызывает большой показатель преломления в полупроводнике [$\Delta n(\omega) > 0$] по сравнению со сторонами пучка. Длина оптического пути луча [$n(\omega)d$, где $n(\omega)$ - показатель преломления, а d – толщина образца] в центре, таким образом, больше, чем в стороне. Материал эффективно ведет себя как положительная линза для гауссова пучка.

По-нашему мнению наблюдение в кристаллах GaSe нелинейного поглощения обусловлено безызлучательной рекомбинацией неравновесных электронно-дырочных пар, генерированных лазерным светом. Действительно, когда полупроводник возбуждается мощным лазерным излучением, образуются электронно-дырочные пары, концентрация которых может достигать $\sim 10^{18}-10^{19}$ см³. Рекомбинация этих носителей происходит в основном по двум каналам, излучательным или безызлучательным.

В полупроводниках с обычными значениями ширины запрещенной зоны (1-2 эВ) интенсивность излучательной рекомбинации незначительна. При излучательной рекомбинации происходит излучение фотонов, энергия которых соответствует зона-зонным, экситонным или примесным переходам. В случае безызлучательной рекомбинации электронно-дырочные пары передают свою энергию кристаллу за счет фононного излучения, что соответствует нагреву решетки. В эксперименте безызлучательная рекомбинация наблюдается в подавляющем большинстве случаев. Как правило, в полупроводниковых кристаллах нагрев образца уменьшает ширину запрещенной зоны с соответствующим красным смещением относительно края полосы поглощения. В результате воздействия лазерного нагрева изменяется коэффициент поглощения и показатель преломления вещества.

В пользу безызлучательного механизма рекомбинации, также свидетельствуют проводимые нами эксперименты с использованием внешнего электрического поля. Как показывают экспериментальные результаты, в кристаллах GaSe наблюдается значительный сдвиг края полосы поглощения под действием внешнего электрического поля. На рис.4 приведены спектры пропускания GaSe при различных значениях приложенных к образцу напряжений. Как видно из рисунка, край полосы поглощения GaSe без приложенного электрического поля соответствует длине волны $\lambda=620$ нм, что хорошо согласуется с результатами работ по электропоглощению в GaSe [28]. При приложении к образцу напряжения наблюдается сдвиг

края полосы поглощения в длинноволновую область спектра. При этом сравнительно большой сдвиг ~ 16 нм, что соответствует 50 мэВ, наблюдается при 18 В.

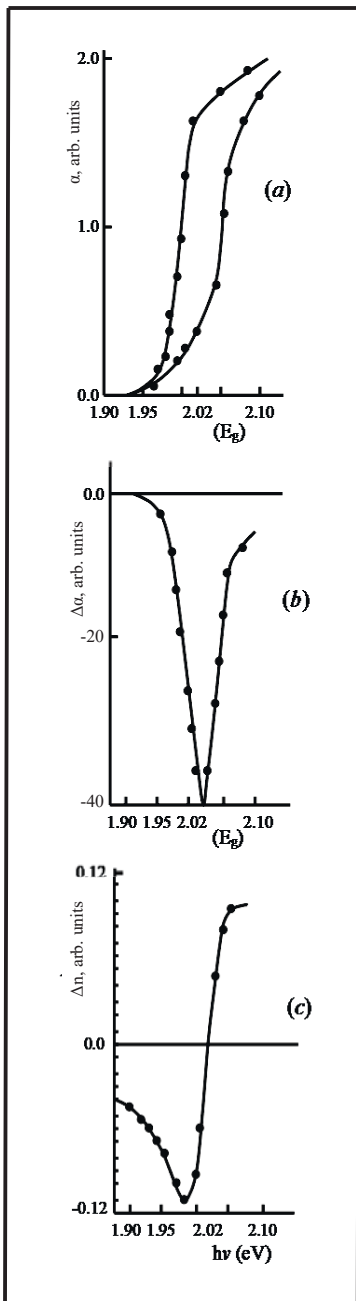


Рис. 3. Оптическая нелинейность в GaSe. (a) Спектры поглощения у края полосы поглощения при низкой (кривая 1) и высокой (кривая 2) интенсивностях возбуждения. (b) Изменение коэффициента поглощения. (c) Изменение показателя преломления.

Красное смещение края поглощения в GaSe может быть связано с эффектом Франца-Келдыша или тепловым нагревом образца при приложении постоянного электрического поля. Но наши экспериментальные результаты не могут быть удовлетворительно объяснены с помощью эффекта Франца-Келдыша. Согласно этой модели, сдвиг края поглощения определяется следующей формулой [29]:

$$h\theta = 0.0725 \left(\frac{m_0}{\mu}\right)^{1/3} E^{2/3} \quad (2)$$

где $\mu^{-1} = (m_e)^{-1} + (m_h)^{-1}$ - приведенная эффективная масса, а E - приложенное электрическое поле в МВт/см. Подставив значения эффективных масс электронов $m_e = 0.3m_0$ и дырок $m_h = 0.2m_0$ для GaSe [30], а также экспериментальное значение приложенного к образцу электрического поле $E=10^3$ В/см в формулу (2), получим, что сдвиг края поглощения, связанный с эффектом Франца-Келдыша составляет всего лишь $\sim 1,4$ мэВ, который намного меньше экспериментально полученного значения (~ 50 мэВ).

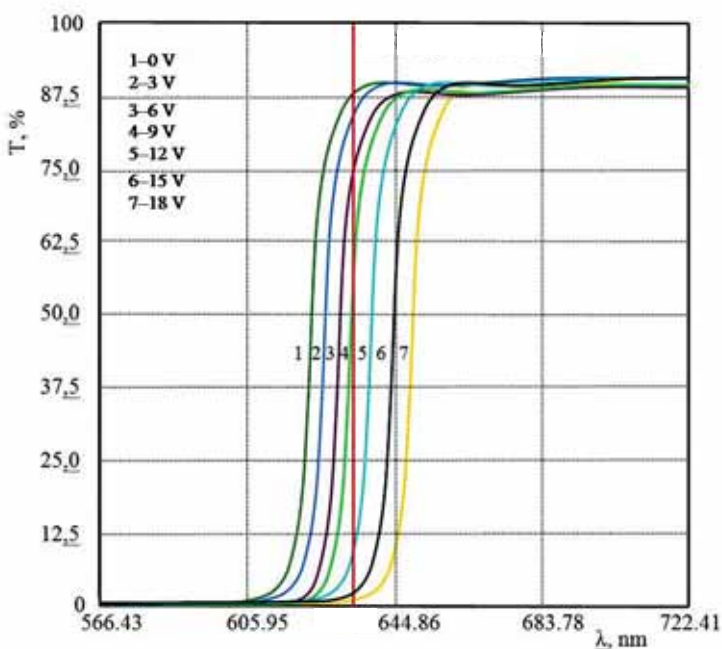


Рис.4. Спектры пропускания GaSe при различных значениях приложенного к образцу напряжений.

Полученные нами экспериментальные результаты могут быть удовлетворительно объяснены на основе нагрева кристаллической решетки приложенным к образцу внешним электрическим полем. Оценки показывают, что образцы из GaSe с удельным сопротивлением $\sim 10^3$ Ом·см

под действием электрического поля ~ 20 В выделяют джоулевскую энергию $\sim 1,9$ Вт/см². Эта величина является достаточной для нагрева образца $\sim 55-60$ °С. С другой стороны, известно, что для большинства широкозонных полупроводников, таких как GaSe, уменьшение ширины запрещенной зоны с ростом температуры определяется формулой [4]:

$$E_g(T) = 2020 \text{meV} - \frac{0.58T^2}{T + 226K} \frac{\text{meV}}{K} \quad (3)$$

Действительно, оценки, основанные на формуле (3), показывают, что нагрев кристалла GaSe лазерным излучением до $50-60$ °С может привести к смещению края поглощения в длинноволновую область ~ 50 мэВ. Таким образом, наши экспериментальные результаты подтверждают наличие эффекта тепловой нелинейности в кристаллах GaSe под действием лазерного излучения.

Более детальное исследование нелинейных параметров GaSe проводилось с использованием метода z-сканирования. На рис.5,а показана зависимость пропускания, как функция положения образца относительно фокуса линзы (z-сканирование с открытой апертурой). Как видно из рисунка, эта зависимость симметрична относительно фокуса линзы ($z=0$ мм), в котором наблюдается минимум пропускания. T_V -пропускание образца при малой интенсивности падающего излучения (в отсутствие нелинейных эффектов), T_P - пропускание образца при большой интенсивности падающего излучения. Характерная форма функции передачи для z-сканирования с закрытой апертурой показана на рис. 5,б. В случае, когда образец с положительным нелинейным показателем преломления находится далеко от фокуса линзы, интенсивность излучения, проходящего через образец мала и поскольку толщина образца невелика, пропускание незначительно изменяется с движением, Как только образец приближается к фокусу, интенсивность в пучке становится достаточной для самофокусировки в образце.

Расположение пика и впадины коэффициента пропускания в эксперименте z-сканирования позволяет определить знак нелинейности. Величина изменения индекса может быть получена путем анализа коэффициента пропускания z-сканирования. Величина нелинейного изменения индекса $\Delta n(\omega)$ (значение на оси в фокусе, $z = 0$) приводит к изменению фазы:

$$\Delta\Phi_0 = (2\pi / \lambda)\Delta n(\omega)L_{eff}, \quad (4)$$

где $L_{eff} = (1 - \exp(-\alpha l)) / \alpha$ - эффективная длина образца, λ - длина волны лазера.

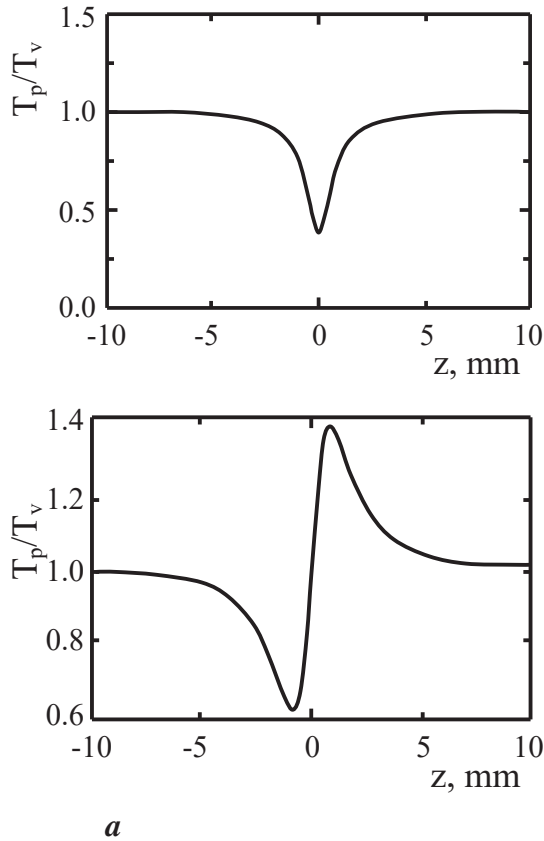


Рис.5. Пропускание, как функция положения образца относительно фокуса линзы: (а) z-сканирования с открытой апертурой, (б) z-сканирования с закрытой апертурой.

Изменение фазы и, следовательно, изменение показателя преломления получаются из измеряемой величины ΔT_{pv} , которая определяется как разница между коэффициентами пропускания на пике и в долине, $\Delta T_{pv} = T_p - T_v$. Так как $\Delta T_{pv} \approx 0.45(\Delta\Phi)$, нелинейный показатель преломления $\Delta n(\omega)$ можно представить в следующей форме:

$$\Delta n(\omega) = \frac{\Delta T_{pv} \cdot \lambda \cdot \alpha}{0.405 \cdot 2\pi(1 - \exp(-\alpha l))}, \quad (4)$$

где $\lambda=620$ nm - длина волны лазерного излучения, $\alpha \approx 10^3$ cm⁻¹ коэффициент поглощения GaSe у края полосы поглощения, $l=100$ μm - толщина использованных образцов.

Оценки показывают, что в случае возбуждения кристаллов GaSe лазерным излучением с максимальной мощностью $W \sim 10$ МВт/см², изменение нелинейного показателя преломления равно $\Delta n(\omega) \approx 0,12$. При

малых интенсивностях возбуждения $W \sim 0,5 \text{ МВт /см}^2$, изменение нелинейного показателя преломления составляет всего $\Delta n(\omega) \approx 0,069$.

Заключение

В кристаллах GaSe под действием лазерного излучения обнаружена тепловая нелинейность. Индуцированное лазером изменение отрицательного показателя преломления приводит к оптической нелинейности с дефокусировкой, положительное изменение отрицательного показателя преломления на стороне низкой энергии, соответствует оптической нелинейности с самофокусировкой. Причина такой терминологии заключается в том, что полупроводниковая среда ведет себя как собирающая и рассеивающая линза. Об эффекте тепловой нелинейности, наблюдаемой в кристаллах GaSe под воздействием лазерного излучения, свидетельствует также значительный сдвиг края полосы поглощения, обнаруженный нами в длинноволновой области спектра под воздействием внешнего электрического поля. Расчет показывает, что приложение к образцу непрерывного напряжения $\sim 20 \text{ В}$ приводит к нагреву вещества $\sim 55\text{-}60 \text{ }^\circ\text{С}$. Измерения z-сканирования показали, что кристаллы GaSe демонстрируют сильное нелинейное поглощение и нелинейную рефракцию под действием лазерного излучения. При мощности лазера $W \sim 10 \text{ МВт/см}^2$ изменение показателя преломления составляет $\Delta n(\omega) \approx 0,12$. Все эти результаты показывают, что кристаллы GaSe являются подходящим материалом для применения в оптических устройствах.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики – Грант № EIF/ MQM/ Elm-Tehsil -1-2016-1(26)-71/01/1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панков Ж. Оптические процессы в полупроводниках. М.: Мир, 1973, 443с.
2. К.В. Шалимова. Физика полупроводников. М.: Энергоатомиздат, 1985, 391 с.
3. Мосс Т., Баррел Г., Эллис Б. Полупроводниковая оптоэлектроника. Москва, Изд. Мир, 1976, 428 с.
4. N.Peyghambarian, S.W. Koch and A. Mysyrovicz, Introduction to semiconductor optics, Series in Solid State Physical Electronics (Prentice-Hall, New Jersey), 1993, p.325.
5. G.B. Abdullaev, L.A. Gulevski, A.P. Prokhorov, A.D. Saveliev, E.Yu. Salaev and V.V. Smirnov. JETP Lett. 16 (1972) 130.
6. G.A. Akhundov, A.A. Agaeva, V.M. Salmanov, Yu. P. Scharonov and I.D. Yarochetski. Sov. Phys. Semicond. 7 (1973) 1229.
7. G.B. Abdullaev, K.R. Allakhverdiev, L.A. Gulevski, A.P. Prokhorov, E.Yu. Salaev, A.D. Saveliev, and V.V. Smirnov. Quantum Electronics 2 (1975) 1228.
8. E.B. Bereginin, P.M. Valov, T.B. Ribakova, V.M. Salmanov and I.D. Yarochetski. Sov. Phys. Semicond. 9 (1975) 2288.
9. G.P. Golubev, B.S. Dneprovskii, Z.D. Kovalyuk and V.A. Stadnik. Fiz. Tverd. Tela 27 (1985) 432.
10. G.B. Abdullaev, B.R. Mirzoev, S.M. Rivkin, V.M. Salmanov and I.D. Yarochetski. Sov.

- Phys. Semicond. 4 (1970) 1393.
11. R. Baltramieyunas, V. Narkevicius, E. Skaistys, J. Vaitkus and J. Viscakas. Nuovo Cimento, B38 (1977) 603.
 12. A. Frova, Ph. Schmid, A. Grisel and F. Levy. Solid. Stat. Commun. 23 (1977) 45.
 13. S.S. Yao, J. Bchert and R.R. Alfano. Phys. Rev. B 25 (1982) 6534.
 14. V.S. Dneprovskii, A.I. Furtichev, V.I. Klimov, E.V. Nazvanova, D.K. Okorokov and U.V. Vandishev. Phys. Status Solidi (b) 146 (1988) 341.
 15. L. Pavesi and J.L. Staehly. Phys. Rev. B 39 (1989) 10982.
 16. R.E. Nahory, K.L. Shaklee, R.F. Leheny and J.C. De Winter. Solid. Stat. Commun. 9 (1971) 1107.
 17. I.M. Catalano, A. Cingolani, M. Ferrara and A. Minafra. Phys. Status Solidi (b), 68 (1975) 346.
 18. X.Z. Lu, R.Rao, B. Willman, S.Lee, A.G. Doukas and R.R. Alfano. Phys. Rev. B 36 (1987) 1140.
 19. A.I. Bobrysheva, G.P. Golubev, I.I. Dobinda, E.A. Zhukov, D.G. Luchinskii and Yu.G. Shekun. Phys. Status Solidi (a) 117 (1990) 587.
 20. G.B. Abdullaev, I.O. Godzhaev, N.B. Kakhramanov and R.A. Suleimanov, Fiz. Tverd. Tela 34 (1992) 75.
 21. M.J. Moran, C.Y. She, R.L. Carman. IEEE J. Quantum Electronics 11 (1975) 259.
 22. M. Kull, J.L. Coutaz. J. Opt. Soc. Am. B 7 (1990) 1463.
 23. R. Adair, L.L. Chase, S.A. Payne. J. Opt. Soc. Am. B 4 (1987) 875.
 24. W.E. Williams, M. J. Soileau, E.W. Van Stryland. Opt. Commun. 50 (1989) 256.
 25. M. Sheik-Bahae, A.A. Said, E.W. Van Stryland. Opt. Lett. 14 (1989) 955.
 26. I.Glatt, O. Kafri. Opt. Laser Eng. 8 (1988) 277.
 27. M.Schluter. Nuovo Cimento B 13 (1973) 313.
 28. S.G. Abdullaeva, V.A. Gadjiyev, T.G. Kerimova, E.Yu. Salaev. Nuovo Cimento B38 (1977), 459-465.
 29. V.A. Tjagay and O.B. Snitko. Electoreflexion in semiconductors, Naygova Dumca, Kiev, 1980, p. 47.
 30. R. Minder, G. Ottaviani, C.Canali. Phys. Chem. Solids 37(1976), 417-425.

GaSe KRİSTALLARINDA QEYRİ-XƏTTİ OPTİK UDMA VƏ SINDIRMA ƏMSALLARININ LAZER ŞÜALARI TƏDQIQI

**A.H.KAZIMZADƏ, V.M.SALMANOV, Ə.H.HÜSEYNOV,
A.Ə.SALMANOVA, R.M.MƏMMƏDOV, F.Ş.ƏHMƏDOVA**

XÜLASƏ

Yüksək optik həyəcanlaşmada GaSe kristallarının qeyri-xətti optik xassələri təcrübi olaraq öyrənilmişdir. Şüa mənbəyi olaraq Nd:YAG lazerinin ikinci harmonikasından ($\lambda=532$ nm) və dalğa uzunluğu 594-643 nm intervalında dəyişən maye lazerdən istifadə edilmişdir. Göstərilmişdir ki, yüksək optik həyəcanlaşmada fundamental udma kənarı kiçik enerji oblastına tərəf sürüşür (qırmızı sürüşmə). Qeyri-xətti optik udma əmsalının, sındırma əmsalının qiyməti və işarəsi z-skan üsulu ilə təyin edilmişdir. Müəyyən edilmişdir ki, optik udma və sındırma əmsalının spektrlərində müşahidə olunan xüsusiyyətlər lazer şüalarının təsiri ilə kristalda yaranan elektron-deşik cütünün şüalanmasız rekombinasiya prosesində iştirakı ilə əlaqədardır. Fononların iştirakı ilə baş verən şüalanmasız rekombinasiya prosesi nəticəsində kristal qəfəsin qızması optik udma kənarının uzundalğalara tərəf sürüşməsinə səbəb olmuşdur.

Açar sözlər: GaSe, lazer, qeyri-xətti optik udma, z-skan üsulu.

NONLINEAR ABSORPTION COEFFICIENT AND REFRACTIVE INDEX IN GaSe UNDER LASER EXCITATION

A.G. KYAZYM-ZADE, V.M.SALMANOV, A.G.GUSEINOV, A.A.SALMANOVA,
R.M.MAMEDOV, F.Sh.AHMEDOVA

SUMMARY

Nonlinear optical properties of GaSe crystals at high excitation intensities has been investigated experimentally. As an excitation source, a second harmonic Nd:YAG laser ($\lambda = 532$ nm) and dye laser at wavelength region of 594-643 nm was used. It was shown that at high levels of optical excitation, fundamental absorption edge shifts toward lower energies (red shift). The magnitude and sign of the nonlinear absorption coefficient and refractive index were measured using the z-scan technique. It is shown that the observed features in the absorption and refractive index spectra are due to nonradiative recombination of electron-hole pairs, generated by laser radiation, which transfer their energy to the crystal through phonon emission, which corresponds to lattice heating.

Keywords: GaSe, laser, nonlinear absorption, z-scan technique.

УДК 621.315.592

**ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И
ВЛИЯНИЕ ЛЕГИРОВАНИЯ ТЯЖЕЛЫМИ ЛАНТАНИДАМИ
НА НИХ В СЛОИСТЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ $A^{III}B^{VI}$** **А.Ш.АБДИНОВ, Р.Ф.БАБАЕВА*,
С.И.АМИРОВА, Н.А.РАГИМОВА, Э.А.РАСУЛОВ****Бакинский Государственный Университет,*****Азербайджанский Государственный Экономический Университет
*abdinov-axmed@yandex.ru, Babaeva-Rena@yandex.ru***

Экспериментально исследованы зависимости электрофизических параметров (коэффициента Холла, удельной проводимости и подвижности носителей заряда) от температуры, легирования тяжелыми лантанидами (гадолинием, гольмием, диспрозием, эрбием) от технологического происхождения и предыстории изучаемого образца в кристаллах самых характерных представителей класса слоистых полупроводниковых соединений $A^{III}B^{VI}$ моноселенидов индия и галлия.

Установлено, что при низких температурах в различных образцах нелегированных кристаллов этих полупроводников величины электрофизических параметров отличаются и с увеличением значения исходного удельного сопротивления исследуемого образца ход основных характеристик этих параметров существенно расходятся от теории пространственно-однородных кристаллических полупроводников.

Показано, что эти обнаруженные отличия электрофизических параметров и расхождение их основных характеристик от теории пространственно-однородных кристаллических полупроводников, прежде всего, обусловлены слабой связью между слоями и наличием вследствие этого, случайных макроскопических дефектов в исследуемых образцах. Образцы кристаллов слоистых соединений $A^{III}B^{VI}$ можно описать как композитные структуры, состоящие в целом из полупроводниковых низкоомной матрицы и высокоомного наполнителя с одинаковыми химическими составами и кристаллической структурой. Обнаруженные аномалии электрофизических параметров и характеристик в этих полупроводниках можно варьировать легированием тяжелыми лантанидами.

Ключевые слова: коэффициент Холла, удельная проводимость, подвижность носителей заряда, происхождения образца, предыстория образца, исходное удельное сопротивление, случайные макроскопические дефекты.

Развитие современной электроники помимо создания новых полупроводниковых материалов, обладающих оптимальными для каждого

конкретного применения свойствами, требует и все более глубоких исследований физических свойств уже известных. В этом аспекте привлекает внимание также полупроводниковые соединения $A^{III}B^{VI}$ со слоистой кристаллической структурой - монселениды индия и галлия (n-InSe и p-GaSe) [1]. В данной работе представлены полученные нами при исследовании влияния различных факторов, в том числе легирования на электрофизические параметры монселенидов соединений $A^{III}B^{VI}$ со слоистой кристаллической структурой.

Величина исходного (имеющего место при температуре 77К) темнового удельного сопротивления (ρ_{T0}) образцов нелегированных кристаллов n-InSe и p-GaSe в зависимости от их технологического происхождения менялась в пределах $\sim 2 \cdot 10^3 \div 10^7$ Ом·см и $\sim 5 \cdot 10^3 \div 7 \cdot 10^7$ Ом·см, соответственно. Содержание введенной примеси (N_{Ln}) в различных образцах легированных кристаллов обоих полупроводников составляло 10^{-5} ; $5 \cdot 10^{-5}$; 10^{-4} ; $5 \cdot 10^{-4}$; 10^{-3} ; $5 \cdot 10^{-3}$; 10^{-2} ; $5 \cdot 10^{-2}$; 10^{-1} ат.%. Измерения проводились в диапазоне $T=77 \div 350$ К .

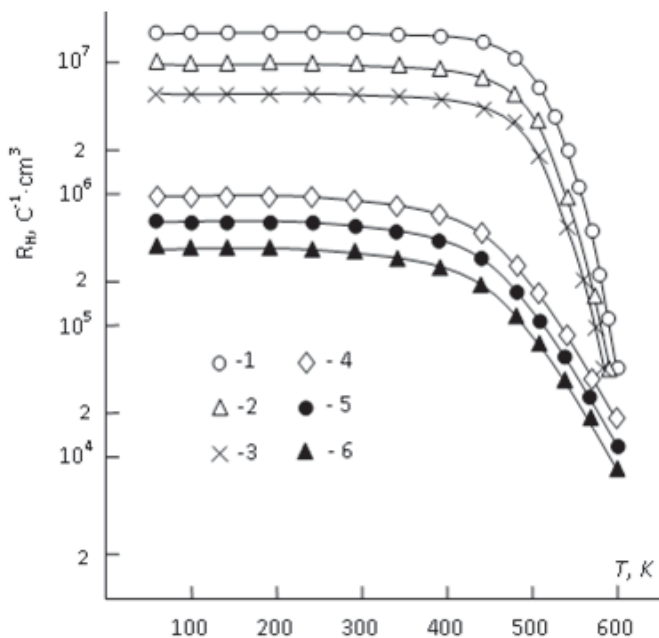


Рис.1. Температурная зависимость коэффициента Холла в чистых кристаллах монселенидов галлия (кр. 1-3) и индия (кр. 4-6) с различным исходным темновым удельным сопротивлением. ρ_0 , Ом·см: 1 - $5 \cdot 10^3$; 2 - $7 \cdot 10^6$; 3 - 10^8 ; 4 - 10^3 ; 5 - $5 \cdot 10^5$; 6 - 10^7

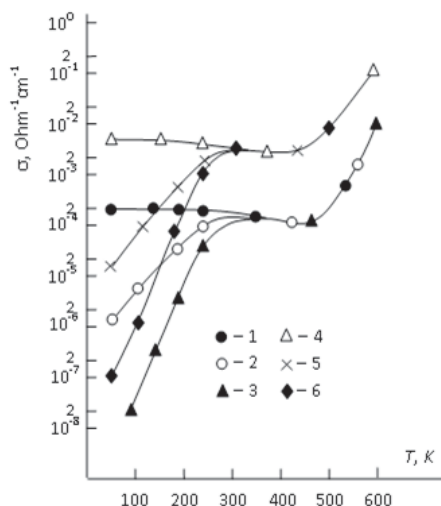


Рис.2. Температурная зависимость удельной проводимости в чистых кристаллах моноселенидов галлия (кр. 1-3) и индия (кр. 4-6) с различным исходным темновым удельным сопротивлением. ρ_0 , Ом·см: 1 - $5 \cdot 10^3$; 2 - $7 \cdot 10^6$; 3 - 10^8 ; 4 - 10^3 ; 5 - $5 \cdot 10^5$; 6 - 10^7

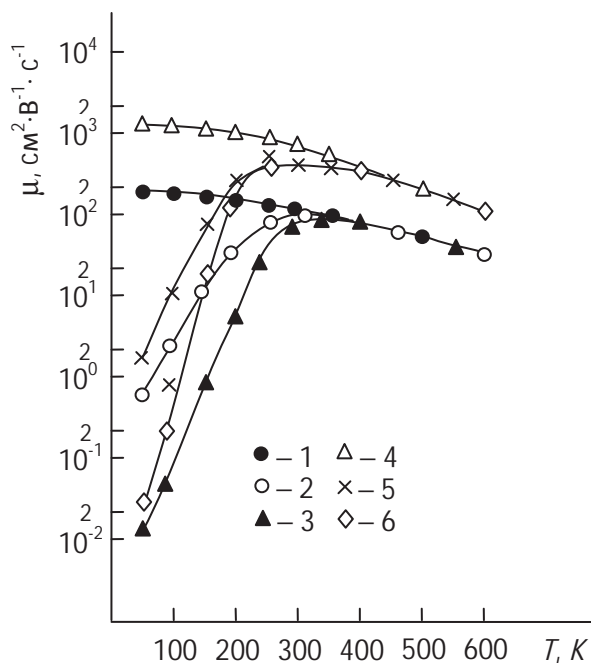


Рис.3. Температурная зависимость подвижности свободных носителей заряда в чистых кристаллах моноселенидов галлия (кр. 1-3) и индия (кр. 4-6) с различным исходным темновым удельным сопротивлением. ρ_0 , Ом·см: 1 - $5 \cdot 10^3$; 2 - $7 \cdot 10^6$; 3 - 10^8 ; 4 - 10^3 ; 5 - $5 \cdot 10^5$; 6 - 10^7

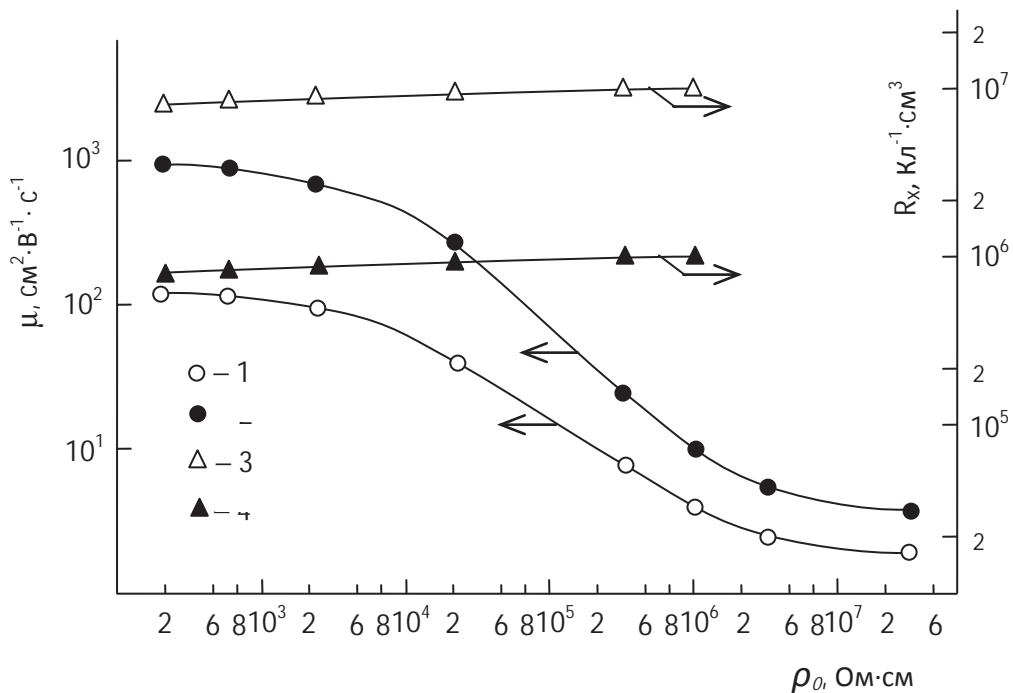


Рис. 4. Зависимость подвижности свободных носителей заряда (кр. 1 и 2) и коэффициента Холла (кр.3 и 4) от величины исходного удельного сопротивления в чистых кристаллах моноселенидов галлия (кр.1 и 3) и индия (кр.2 и 4).

$T=77\text{ K}$

Измерения электрофизических параметров проводились традиционным трёхзондовым методом в переменных электрических и магнитных полях с применением усилителей электрических сигналов [2]. При этом как рабочий, так и холловский ток протекал вдоль, а магнитное поле было направлено перпендикулярно естественным слоям кристалла. В диапазоне $T \approx 77 \div 450\text{ K}$ экспериментально измерялись температурные зависимости удельной проводимости (σ), коэффициента Холла (R_H) и подвижности носителей заряда (μ), а также зависимости μ , σ , R_H от ρ_{T0} и N_{Ln} .

Установлено, что в высокоомных ($\rho_{T0} \geq 7 \cdot 10^3\text{ Ом}\cdot\text{см}$ для n-InSe и $\rho_{T0} \geq 2 \cdot 10^4\text{ Ом}\cdot\text{см}$ для p-GaSe) образцах изучаемых полупроводников в области $T \leq 250\text{ K}$ зависимости $\sigma(T)$, $\mu(T)$ и $R_H(T)$ имеют аномальный ход. В частности, в этой области температуры в кристаллах обоих полупроводников с понижением температуры до 77 K величина R_H не меняется (рис. 1), а величины σ (рис. 2) и μ (рис. 3) – уменьшаются активационным характером и имеют одинаковую энергию активации $\sigma, \mu \sim \exp(-\frac{\Delta\epsilon}{kT})$. При

$T \leq 250\text{ K}$ в кристаллах обоих полупроводников обнаруживается специфици-

ческая зависимость μ от ρ_{T0} (рис. 4, кр. 1 и 2), а также μ и σ от N_{Ln} (рис. 5, кр. 1, 2 и 5, 6, соответственно), а зависимость R_X от ρ_{T0} и N_{Ln} - не наблюдается (рис. 4 и 5, кр. 3 и 4, соответственно).

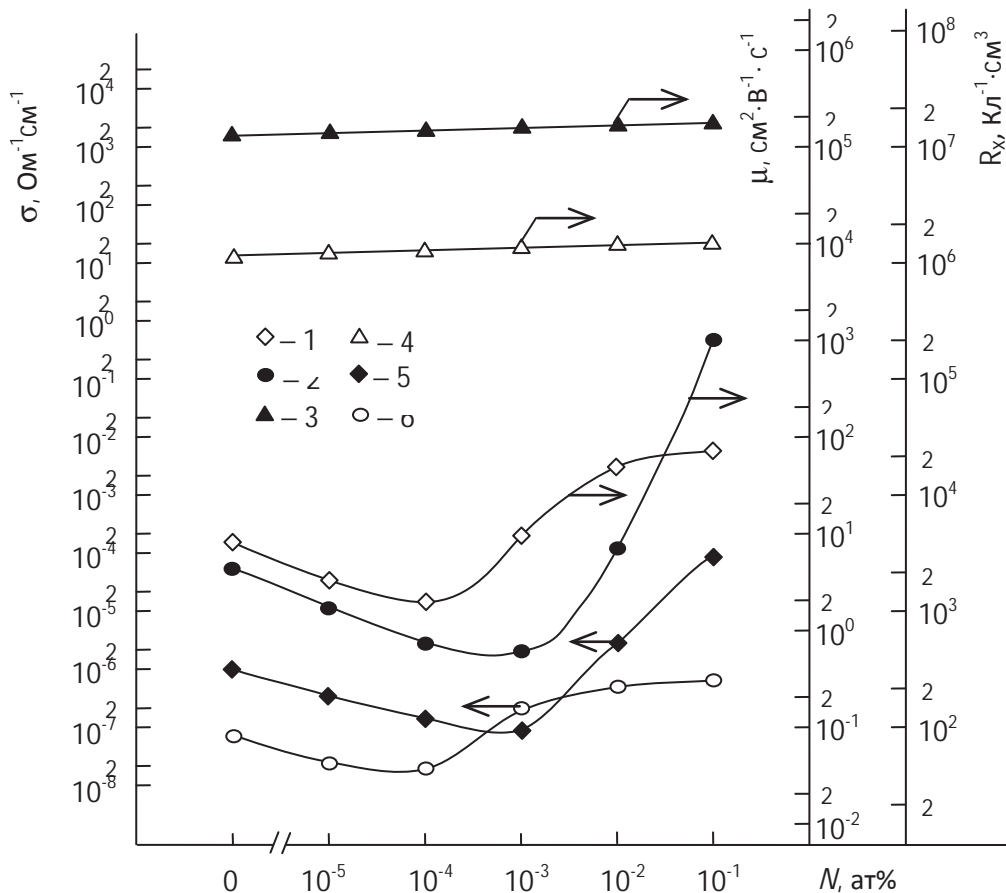


Рис. 5. Зависимость подвижности носителей заряда (кр. 1 и 2), коэффициента Холла (кр. 3 и 4) и удельной проводимости (кр. 5 и 6) от содержания введенной примеси РЗЭ в кристаллах моноселенидов галлия (кр. 1, 3 и 5) и индия (кр. 2, 4 и 6).

$T=77\text{ K}$

Установлено, что при температуре 77 К в высокоомных образцах исследуемых полупроводников величина μ совсем незначительна (иногда составляет всего лишь доли единицы $\text{см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$). Однако с повышением температуры до 300÷350 К она увеличивается по экспоненциальному закону ($\mu \sim e^{-\frac{\Delta\varepsilon}{kT}}$) до $\sim 600\div 1000\text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ и $\sim 300\div 500\text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ для n-InSe и p-GaSe, соответственно. При низких температурах величины μ и σ с ростом ρ_{T0} уменьшаются, а с изменением N_{Ln} - меняются немонотонно.

Влияние легирования лантанидами на электрофизические параметры в исследуемых кристаллах наблюдается лишь при $T \leq 250 \div 300$ К (для различных образцов в зависимости от содержания введенной примеси), при малых содержаниях введенной примеси (при $N_{Ln} < 10^{-2}$ ат. %) и в основном заключается в изменениях величин μ и σ , а также хода кривых зависимостей $\sigma(T)$, $\mu(T)$, $\sigma(E)$, $\mu(E)$ с изменением N_{Ln} . Наибольшее влияние легирования лантанидами на электрофизические параметры наблюдается при содержаниях введенной примеси $N_{Ln} \approx 5 \cdot 10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-3}$ ат. % в различных образцах в зависимости от материала исследуемого полупроводника и химической природы введенной примеси. Состояние с высокой степенью воспроизводимости и стабильности электрофизических параметров и характеристик кристаллов n-InSe<Ln> и p-GaSe<Ln> наблюдается при содержаниях введенной примеси большего определенного значения $(N_{Ln})_{кр}$. Значение $(N_{Ln})_{кр}$ зависит как от материала полупроводника, так и от химической природы введенной примеси. Сравнение результатов для легированных различными лантанидами с $N_{Ln} \approx 10^{-1}$ ат. % образцов показали, что в них величины и ход основных зависимостей электрофизических параметров совпадают, а также обладают высокой степенью стабильности и воспроизводимости. При увеличении атомного номера введенной примеси (при переходе от Gd к Er), величина $(N_{Ln})_{кр}$ уменьшается от $\sim 10^{-1}$ до $\sim 10^{-2}$ ат. % и от $\sim 10^{-1}$ до $\sim 5 \cdot 10^{-3}$ ат. % в кристаллах n-InSe<Ln> и p-GaSe<Ln>, соответственно. При $T \geq 320 \div 330$ К во всех исследуемых образцах обоих полупроводников (в нелегированных с различными ρ_{T0} и легированных лантанидами с различной химической природой при различных N_{Ln}) основные зависимости электрофизических параметров удовлетворительно подчиняются закономерностям теории пространственно-однородных кристаллических полупроводников. С уменьшением величины ρ_{T0} характер электрофизических параметров в образцах нелегированных кристаллов n-InSe и p-GaSe в области низких температур тоже приближается критериям этой теории.

Сравнительный анализ полученных экспериментальных результатов показывает, что обнаруженные особенности электрофизических параметров, т.е. разброс величин электрофизических параметров для разных образцов и расхождение хода их зависимостей от различных факторов с увеличением величины исходного темнового удельного сопротивления исследуемого образца от теории пространственно-однородных кристаллических полупроводников, зависимости этих разбросов и расхождений от величины ρ_{T0} в нелегированных и содержания вводимой примеси в легированных лантанидами с различной химической природой монокристаллах n-InSe и p-GaSe не могут однозначно объясняться лишь в рамках соответствующих представлений этой теории. При этом необходимо учитывать также наличие в этих кристаллах случайных макроскопических

дефектов (СМД) и вакансий металлического компонента соединений $A^{III}B^{VI}$ (атомов In и Ga в кристаллах n-InSe и p-GaSe, соответственно). Возникшие вследствие слабой Ван-дер-Ваальсовой связи между слоями [1] СМД имеют одинаковый химический состав и кристаллическую структуру с основной матрицей, но - большое удельное сопротивление. Поэтому эти кристаллы можно описывать как композитную структуру, состоящую в целом из полупроводниковой низкоомной матрицы (НМ) и высокоомного наполнителя (ВН) с одинаковыми химическими составами и кристаллической структурой. В такой полупроводниковой структуре на границах НМ и ВН существуют рекомбинационные и между соседними СМД - дрейфовые барьеры [3]. В исходном состоянии, чем больше число и размеры дрейфовых барьеров в кристалле, тем высокой будет его темновое удельное сопротивление, низкой - подвижность носителей заряда, более значительное - расхождение экспериментальных результатов от представлений теории пространственно однородных кристаллических полупроводников, а в образцах с различными ρ_{T0} - разброс электрофизических параметров и их основных характеристик. Исходя из активационного характера экспериментально обнаруженной зависимости μ от T , по наклону кривых зависимостей $\mu(T)$ определены значения энергетической высоты этих дрейфовых барьеров ($\Delta\epsilon_i$), которые при 77 К для различных образцов (в зависимости от величин ρ_{T0} и N_{Ln}) n-InSe и p-GaSe составляли $\sim 0.05 \div 0.15$ эВ и $\sim 0.10 \div 0.20$ эВ, соответственно. При легировании лантанидами, ионы введенной примеси, скапливаясь на СМД, увеличивают их размеры. Вследствие чего, сначала (при $N_{Ln} \approx 5 \cdot 10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-3}$ ат.% в различных образцах в зависимости от материала исследуемого полупроводника и химической природы введенной примеси) с ростом N_{Ln} пространственная неоднородность и, соответственно, препятствие созданных СМД барьеров на дрейф носителей заряда усиливается. Далее, т.е. при $(5 \cdot 10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-3}) < N_{Ln} \leq 10^{-1}$ ат.%, из-за «укрупнения» СМД, расстояние между соседними случайными макроскопическими дефектами становятся сравнимы с длиной диффузии, а, следовательно, и длиной свободного пробега носителей заряда. При этом макроскопические дефекты «сплачиваются» и подобно случаю для сильнолегированных полупроводников, кристаллы исследуемых соединений $A^{III}B^{VI}$ постепенно приближаются к пространственно-однородному состоянию [4]. Поэтому зависимости $\sigma(N_{Ln})$ и $\mu(N_{Ln})$, а также влияние содержания введенной примеси лантанидов на зависимости $\sigma(T)$, $\mu(T)$ имеют немонотонный характер. Помимо этого, из-за усиления ковалентной связи между слоями за счет вхождения ионов трехвалентных лантанидов в существующие на соседних слоях вакансии A^{III} , усиливается также общая межслойная связь в кристаллах и увеличивается их устойчивость. Оба этих процессов, в свою очередь, приводят к росту электропроводности и подвижности носителей заряда, а также повыше-

нию стабильности и воспроизводимости электрофизических параметров и характеристик в кристаллах $A^{III}B^{VI}\langle Ln \rangle$. Независимость величин и хода основных характеристик электрофизических параметров от химической природы введенной примеси свидетельствует о том, что введенные при таких содержаниях ($N \leq 10^{-1}$ ат.%) атомы лантанидов не создают активные примесные уровни, скапливаясь на СМД и (или) входя в вакансии A^{III} меняют лишь окружающую СМД области пространственного заряда (ОПЗ) и (или) устойчивость кристалла, соответственно. Зависимость значения $(N_{Ln})_{кр}$ от материала полупроводника и химической природы введенной примеси связана с плавным уменьшением размеров атомов и ионов используемых в качестве примесей лантанидов при увеличении атомного номера (по ряду Gd, Dy, Ho, Er) [5, 6]. Эта ситуация облегчает вхождение используемых лантанидов в вакансии A^{III} с увеличением их атомных номеров. Кроме того, из-за большого значения ионного радиуса Ga по сравнению с In [5, 7] в p-GaSe<PЗЭ> изучаемые лантаниды легко входят в вакансии металлического компонента, чем в n-InSe<PЗЭ>.

Таким образом, можно заключить, что:

- обнаруженные в образцах кристаллах полупроводниковых соединений $A^{III}B^{VI}$ со слоистой структурой разброс величин электрофизических параметров для различных образцов и расхождения хода их основных зависимостей от теории пространственно-однородных кристаллических полупроводников, прежде всего связаны с наличием в этих кристаллах вакансий металлического компонента соединений - A^{III} (атомов In и Ga в кристаллах n-InSe и p-GaSe, соответственно) и возникших вследствие слабой связи между соседними слоями - случайных макроскопических дефектов;

- для выяснения особенностей кинетических параметров в этих полупроводниках можно применит модель композиционной структуры, состоящей в целом из низкоомной матрицы и одинаковыми с ней химическим составом и кристаллической структурой, но более высокоомными случайными наполнителями;

- при легировании лантанидами ионы введенной примеси, скапливаясь на СМД, увеличивают их размеры. При малых содержаниях введенной примеси с ростом N_{Ln} препятствие барьеров на дрейф носителей заряда усиливается, а далее из-за «укрупнения» СМД, расстояния между соседними случайными макроскопическими дефектами становятся сравнимы с длиной свободного пробега носителей заряда - макроскопические дефекты «сплачиваются» (их области пространственного заряда перекрываются) и исследуемые кристаллы $A^{III}B^{VI}$ постепенно приближаются к пространственно-однородному состоянию;

- величину и характер зависимостей электрофизических параметров от различных факторов в кристаллах слоистых полупроводников $A^{III}B^{VI}$

можно варьировать процентным содержанием примесей тяжелых лантанидов;

- введенные в кристаллы слоистых полупроводников $A^{III}B^{VI}$ лантанидные примеси при содержаниях $N_{Ln} \leq 10^{-1}$ ат.% скапливаясь на СМД и (или) входя в вакансии A^{III} , меняют лишь размер окружающего СМД области пространственного заряда (ОПЗ) и (или) устойчивость кристалла, соответственно, не создавая активные примесные уровни;

- зависимость значения содержания введенной примеси, выше которого устанавливается состояние с высокой степенью воспроизводимости и стабильности электрофизических параметров и характеристик исследуемых кристаллов $A^{III}B^{VI}$, от материала полупроводника и химической природы введенной примеси обусловлена с плавным уменьшением размеров атомов и ионов используемых в качестве примесей лантанидов при увеличении атомного номера (по ряду Gd, Dy, Ho, Er).

ЛИТЕРАТУРА

1. Медведева З.С. Халькогениды элементов III Б подгруппы периодической системы. М.: Наука, 1968, 216 с.
2. Ковтанюк Н.Ф., Концевой Ю.А. Измерения параметров полупроводниковых материалов. М.: Металлургия, 1970, 429 с.
3. Шик А.Я. Фотопроводимость случайно-неоднородных полупроводников // ЖЭТФ, 1972, Т. 15, с. 408-410.
4. Шкловский Б.И., Эфрос А.Л. Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука, 1979, 416 с.
5. Свойства элементов. Под редакцией М.Е. Дрица. Справочное издание. М.: Металлургия, 1985, 672 с.
6. Угай Я.А. Общая неорганическая химия. М.: Высшая школа, 1997, 527 с.
7. Хенней Н. Химия твердого тела. М.: Мир, 1971, 223 с.

LAYLI $A^{III}B^{VI}$ YARIMKEÇİRİCİLƏRİN ELEKTROFİZİKİ PARAMETRLƏRİNİN XÜSUSİYYƏTLƏRİ VƏ AĞIR LANTANİDLƏRLƏ AŞQARLANMANIN ÖNLƏRƏ TƏSİRİ

Ə.Ş.ABDİNOV, R.F.BABAYEVA, S.İ.ƏMİROVA, N.Ə.RƏHİMOVA, E.A.RƏSULOV

XÜLASƏ

Laylı quruluşa malik $A^{III}B^{VI}$ yarımkeçiricilər sinfinin xarakterik nümayəndələri olan indium və gallium monoselenidlərində təcrübə olaraq elektrofiziki parametrlərin (Holl əmsalı, xüsusi keçiricilik və yükdaşıyıcıların yürüklüyü) temperaturdan, ağır lantanidlərlə (qadolinium, holmium, disprozium, erbium) aşqarlanmadan, tədqiq olunan nümunələrin texnoloji mənsəyindən və ölçmələrdən əvvəlki tarixindən asılılığı tədqiq olunmuşdur.

Müəyyən olunmuşdur ki, aşağı temperaturlarda bu yarımkeçiricilərin aşqar daxil edilməmiş kristallarının müxtəlif nümunələrində elektrofiziki parametrlərin qiymətləri fərqlənir və tədqiq olunan nümunələrin ilkin xüsusi müqavimətlərinin qiyməti artdıqca bu parametrlərin əsas xarakteristikalarının gedişi fəzaca bircins kristal yarımkeçiricilər üçün olan nəzəriyyənin müddəalarından kifayət qədər kənara çıxır.

Göstərilmişdir ki, elektrofiziki parametrlərin müşahidə olunan fərqliliyi və onların əsas xarakteristikalarının fəzaca bircins kristal yarımkəçiricilərin nəzəriyyəindən kənara çıxmaları ilk növbədə laylar arası zəif rabitə və bunun nəticəsində tədqiq olunan kristallarda təsadüfi xarakterli makroskopik defektlərin mövcudluğu ilə bağlıdır. $A^{III}B^{VI}$ birləşməli laylı kristalları bütövlükdə eyni kimyəvi tərkibə və kristal quruluşa malik alçaqomlu matrisə və yüksəkəomlu doldurucudan ibarət kompozit strukturlar kimi təsvir etmək olar. Bu yarımkəçiricilərin elektrofiziki parametr və xarakteristikalarının müəyyən olunan anomaliyalarını ağır lantanidlərlə aşqarlarla idarə etmək mümkündür.

Açar sözlər: Holl əmsalı, xüsusi keçiricilik, yükdaşıyıcıların yürüklüyü, nümunənin mənşəyi, nümunənin əvvəlki tarixi, ilkin xüsusi müqavimət, təsadüfi makroskopik defektlər.

PECULIARITIES of ELECTROPHYSICAL PARAMETERS of LAYERED $A^{III}B^{VI}$ SEMICONDUCTORS and EFFECT of DOPING with HEAVY LANTHANIDES

A.Sh.ABDINOV, R.F.BABAYEVA, S.LAMIROVA,
N.A.RAHIMOVA, E.A.RASULOV

SUMMARY

Experimentally have been studied the dependences of electrophysical parameters (Hall coefficient, specific conductivity and mobility of free charge carriers) on temperature in the crystals of the most characteristic representatives of the class of layered $A^{III}B^{VI}$ semiconductor compounds - indium and gallium monoselenides, as well as doping them with heavy lanthanides (gadolinium, holmium, dysprosium, erbium), technological origin and history of the studied sample. It has been established that at low temperatures, in different samples of non-doped crystals of these semiconductors the values of electrical parameters differ and with an increase in the value of the initial specific resistance of the sample under study, the course of the main characteristics of these parameters diverges significantly from the theory of crystalline semiconductors. It is shown that these revealed differences in the electrophysical parameters and the divergence of their main characteristics from the theory of crystalline semiconductors are primarily due to the weak bonds between the layers and the presence, as a consequence, of random macroscopic defects in the crystals under study. Crystals of layered $A^{III}B^{VI}$ compounds can be described as composite structures consisting of the semiconductor low-resistance matrix and a high-resistance filler with the same chemical composition and crystal structure. The detected anomalies of the electrophysical parameters and characteristics in these semiconductors can be varied by doping with heavy lanthanides.

Key words: Hall coefficient, conductivity, charge carrier mobility, sample origin, sample history, random macroscopic defects, initial resistivity.

PACS: 61.20.Ne, 66.20.+d, 82.60.Lf, 61.25.Hq.

SU-PEQ-KBr SİSTEMLƏRİNDƏ PEQ MAKROMOLEKULUNUN KONFORMASIYASININ VƏ ÖLÇÜLƏRİNİN TƏYİNİ

E.Ə.MƏSİMOV, B.G.PAŞAYEV, M.R.RƏCƏBOV, L.P.ƏLİYEV

Bakı Dövlət Universiteti
p.g.bakhtiyar@gmail.com

İşdə su-PEQ-KBr sistemlərinin 293,15 K temperaturda və KBr-in 0-0,05 molyar hissə, PEQ-nin isə 0-5 q/dl konsentrasiya intervalında kinematik özlülüüyü tədqiq edilmişdir, PEQ-nin molekul kütlələri 1000, 1500, 3000, 4000 və 6000 olan fraksiyaları götürülmüşdür. Kinematik özlülüüyün təcrübi qiymətlərinə əsasən KBr-in baxılan konsentrasiyası intervalında tədqiq olunan məhlulların xarakteristik özlülüüyü, Haggins sabiti, Mark-Kun-Xauvinq düsturuna daxil olan α parametri, polietilenqlikol makromolekulunun şişmə əmsalı, θ -həllədicidə xarakteristik özlülüüyü, məhlulda və θ -həllədicidə PEQ makromolekulunun zəncirinin ucları arasındakı orta kvadratik məsafə, məhlulda və θ -həllədicidə Kun seqmentinin uzunluğu hesablanmışdır. Müəyyən olunmuşdur ki, PEQ makromolekulu su-KBr mühitində ətrafdakı mayenin nüfuz edə bildiyi yumaq formasındadır və KBr-in konsentrasiyasının artması ilə bu yumağın həcmi kiçilir, mütəhərrikiyi isə artır.

Açar sözlər: KBr, polietilenqlikol, xarakteristik özlülük, Haggins sabiti, polimer zəncirinin ucları arasındakı orta kvadratik məsafə, şişmə əmsalı, Kun seqmenti

Polietilenqlikol (PEQ) mühüm praktik əhəmiyyətli (təbabətdə, kosmetologiyada, biotexnologiyada, qida sənayesində və s.) polimer olduğuna görə uzun illərdir tədqiqatçıların tədqiqat obyektidir [1-11]. PEQ-nin qonşu homoloqları olan polimetilenoksid və polipropilenoksid poliefirlərdən fərqli olaraq PEQ polimerləşmə dərəcəsinin (n) geniş intervalında otaq temperaturunda suda yaxşı həll olur [4]. PEQ molekulunda ($HO - [-CH_2 - CH_2 - O -]_n - H$) həm hidrofob (CH_2), həm də hidrofily (OH) qrupları var [5]. PEQ-nin (OH) qrupu, $-O-$ və $-H$ atomları su molekulu ilə hidrogen rabitəsi yarada bilirlər, CH_2 qrupları isə hidrofob effekti yaradırlar. Su və PEQ molekulları arasındakı qarşılıqlı təsirlər nəticəsində PEQ-nin sulu məhlulunda geləbənzər aqreqatlar və ya klasterlər əmələ gəlir. Elmi ədəbiyyatın [5] təhlili göstərir ki, həm həyəcanlanmamış (θ -həllədicidə), həm də həyəcanlanmış (ixtiyari həllədicidə) PEQ makromolekullarının konformasiyasının müəyyən edilməsinə və ölçülərinin qiymətləndirilməsinə, həmçinin bu konformasiyaya və ölçülərə müxtəlif duzların, əsasların və s. təsirinin öyrənilməsinə zərurət var.

İşdə məqsədimiz su-PEQ-KBr sistemlərində PEQ makromolekulunun konformasiyasını müəyyənləşdirmək və ölçülərini qiymətləndirmək, həmçinin makromolekulun konformasiyasına və ölçülərinə KBr-in təsirini araşdırmaq olmuşdur. Bu məqsədlə, tədqiq olunan məhlulların xarakteristik özlülüyü $[\eta]$, Haggins sabiti $[K_H]$, Mark-Kun-Xauvinq düsturuna daxil olan α parametri, polietilenqlikol makromolekulunun şişmə əmsalı $[\beta]$, θ -həllədicidə xarakteristik özlülüyü $[\eta_\theta]$, məhlulda $[\langle h \rangle]$ və θ -həllədicidə $[\langle h_\theta \rangle]$ PEQ makromolekulunun zəncirinin ucları arasındakı orta kvadratik məsafə, məhlulda $[A]$ və θ -həllədicidə $[A_\theta]$ Kun seqmentinin uzunluğu hesablanmışdır.

Nəzəri hissə

Məhlulda makromolekulların xüsusiyyətləri adətən duru polimer məhlulları halında öyrənilir. Müasir təsəvvürlərə görə duru polimer məhlullarında xətti ölçülü mütəhərrik makromolekul yumaq formasına keçir. Axın zamanı makromolekulun irəliləmə və fırlanma hərəkəti nəticəsində onunla həllədicinin molekulları arasında sürtünmə yaranır ki, bu da özlülüyün artmasına səbəb olur. Axın zamanı ayrı-ayrı makromolekulların fırlanması hesabına xarakteristik özlülük yaranır. Məhlulun xarakteristik özlülüyü həllədicin mühitində polimer molekullarının fırlanması nəticəsində baş verən enerji itkisini xarakterizə edir [5, 14]. Xarakteristik özlülük polimer məhlullarının fiziki kimyasında əsas kəmiyyətlərdən biridir. Məhlulun xarakteristik özlülüyünü müəyyən etməklə məhlulda makromolekulun konformasiyasını və ölçülərini müəyyənləşdirən bir sıra kəmiyyətləri təyin etmək olur.

Xarakteristik özlülüyü təyin etmək üçün əvvəlcə gətirilmiş özlülük (η_g) hesablanır [5, 14]:

$$\eta_g = \frac{V_m - V_h}{V_h c} \quad (1)$$

Burada v_m və v_h uyğun olaraq məhlulun və həllədicinin kinematik özlülükləri, c isə məhlulda polimerin konsentrasiyasıdır. Duru polimer məhlullarında gətirilmiş özlülüyün konsentrasiyadan asılılığı Haggins tənliyi

$$\eta_g = [\eta] + K_H [\eta]^2 c \quad (2)$$

ilə təsvir edilir. Burada $[\eta] = \lim_{c \rightarrow 0} (\eta_g)$ olub xarakteristik özlülük, K_H -Haggins sabiti adlanır və sistemdəki zərrəciklərin qarşılıqlı təsirinin intensivliyini xarakterizə edir [5, 13-16]. (2) tənliyinə əsasən $\eta_g \sim c$ asılılığından qrafik olaraq xarakteristik özlülük və Haggins sabiti təyin edilir.

Polimer məhlulunun xarakteristik özlülüyü ($[\eta]$) ilə polimerin molekul kütləsi (M) arasındakı əlaqə

$$[\eta] = KM^\alpha \quad (3)$$

Mark-Kun-Xauvinq düsturu ilə təsvir olunur [13-16]. Burada K -həllolan maddənin və həlledicinin xassələrindən asılı olan sabit, α -məhlulda polimer makromolekulunun konformasiyasından asılı olan parametrdir. (3) ifadəsinin hər tərəfindən loqarifm alsaq, alınan

$$\ln[\eta] = \ln K + \alpha \ln M \quad (4)$$

ifadəsinə əsasən $\ln[\eta] \sim \ln M$ asılılığından qrafik olaraq α parametri təyin edilir.

Tarazlıqda olan, yəni həyəcanlanmamış polimer makromolekulunun ölçüsünü təyin etmək üçün θ -həlledicidə xarakteristik özlülüyn qiymətindən istifadə olunur. Qeyd edək ki, θ -həlledici elə həllediciyə deyilir ki, həmin həlledicidə polimerin həllolması zamanı yaranan məhlulda mümkün ola biləcək bütün qarşılıqlı təsirlər bir-birini kompensasiya etmiş olur. θ -həlledicidə termodinamik tarazlıq yaranır və polimer molekulu həyəcanlanmamış halda olur. Təbiidir ki, belə həlledicini praktiki olaraq almaq üçün lazım olan şəraiti (təzyiq, temperatur və s.) seçmək olduqca çətindir. Nəzəriyyələr isə θ -həlledicidə qurulur [15, 16]. Belə nəzəriyyələrdən biri də Flori nəzəriyyəsidir [15]. Flori nəzəriyyəsinə görə θ -həlledicidə xarakteristik özlülük ($[\eta]_{\theta}$) aşağıdakı ifadə ilə təyin olunur:

$$[\eta]_{\theta} = K_{\theta} M^{1/2} \quad (5)$$

Burada K_{θ} - θ -sabiti, M -polimerin molekul kütləsidir. (5) ifadəsindən görüldüyü kimi, $[\eta]_{\theta}$ -ni təyin etmək üçün K_{θ} -ni tapmaq lazımdır. Qeyd etdik ki, θ -həlledici olmadığından $[\eta]_{\theta}$ -ni təcrübi qiymətlər əsasında təyin etmək mümkün deyil. Lakin yaxşı həlledicidə xarakteristik özlülüynü təcrübi qiymətlər əsasında təyin etməklə K_{θ} -ni tapmaq olar. Yaxşı həlledicidə özlülük ölçülərinə görə tapılan xarakteristik özlülük $[\eta]$ ilə K_{θ} arasında əlaqə yaradan çoxlu sayda ifadələr var [15, 16]. Məsələn, Stokmayer-Fiksman düsturunda $[\eta]$ ilə K_{θ} arasında əlaqə aşağıdakı kimidir [17]:

$$\frac{[\eta]}{\sqrt{M}} = K_{\theta} + 0,51B\Phi\sqrt{M} \quad (6)$$

Burada B -uzağa təsir parametridir və litrlə ölçülür. $[\eta]$ xarakteristik özlülük təyin olunduqdan sonra (6) ifadəsinə əsasən $\frac{[\eta]}{\sqrt{M}} = f(\sqrt{M})$ asılılığı qurulur.

Alınan düz xəttin $\sqrt{M} \rightarrow 0$ ekstrapolyasiyasından K_{θ} -nin qiyməti tapılır. K_{θ} -nin qiymətini bilərək (5) düsturuna əsasən $[\eta]_{\theta}$ hesablanır.

Polimer yumağının ölçüləri adətən makromolekulun zəncirinin ucları arasındakı orta kvadratik məsafə ilə xarakterizə olunur. İxtiyari həlledicidə

($\langle h \rangle$) və θ -həllədicidə ($\langle h_\theta \rangle$) makromolekulun zəncirinin ucları arasındakı orta kvadratik məsafəni Flori-Foks tənliyindən tapa bilərik [5, 16]:

$$[\eta] = \Phi \frac{\langle h \rangle^3}{M}, \quad [\eta]_\theta = \Phi \frac{\langle h_\theta \rangle^3}{M} \quad (7)$$

Burada Φ -Flori əmsəlidir. Flori təcrübi olaraq müəyyən etmişdir ki, $\Phi = 2,1 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ qiymətinə malik olur [18]. Polimer yumağının ölçülərini hidrodinamik radius (R_h -həllədicidə molekulunun nüfuz edə bilmədiyi radius) və orta kvadratik ətalət radiusu (R_g) ilə də xarakterizə etmək olar. İxtiyari həllədicidə (R_h, R_g) və θ -həllədicidə ($R_{h\theta}, R_{g\theta}$) hidrodinamik radiusu və orta kvadratik ətalət radiusu uyğun olaraq aşağıdakı ifadələrlə hesablamaq olar [18]:

$$R_h = \left(\frac{3M[\eta]}{10\pi N_A} \right)^{1/3}, \quad R_{h\theta} = \left(\frac{3M[\eta]_\theta}{10\pi N_A} \right)^{1/3}, \quad R_g = \frac{\langle h \rangle}{\sqrt{6}}, \quad R_{g\theta} = \frac{\langle h_\theta \rangle}{\sqrt{6}} \quad (8)$$

Məhlulda makromolekulun konformasiyası şişmə əmsalı (β) və Kun seqmentinin uzunluğu (A) kimi parametrlərlə də xarakterizə olunur. Polimer makromolekulu yaxşı həllədicidə β dəfə şişir. Şişmə əmsalı

$$\beta = \left(\frac{[\eta]}{[\eta]_\theta} \right)^{1/3} = \frac{\langle h \rangle}{\langle h_\theta \rangle} \quad (9)$$

ifadəsilə təyin olunur [15]. Makromolekulun mütəhərriqliyi Kun seqmentinin uzunluğu ilə müəyyən olunur. İxtiyari həllədicidə (A) və θ -həllədicidə (A_θ) Kun seqmentinin uzunluğu uyğun olaraq

$$A = \frac{\langle h \rangle^2}{L} = \frac{\langle h \rangle^2}{nl_0}, \quad A_\theta = \frac{\langle h_\theta \rangle^2}{L} = \frac{\langle h_\theta \rangle^2}{nl_0} \quad (10)$$

ifadələrilə təyin olunur [15, 16]. Burada L -makromolekul zəncirinin tam uzunluğu, n -makromolekulda olan təkrarlanan halqaların sayı və ya polimerləşmə dərəcəsi, l_0 -təkrarlanan halqanın kontur uzunluğudur. [9] işində PEQ makromolekulunda təkrarlanan $-CH_2 - CH_2 - O -$ halqasının kontur uzunluğunun $l_0 = 2,36 \text{ \AA}$ olduğu göstərilmişdir.

Təcrübi hissə

İşdə su-PEQ-KBr sistemlərinin 293,15 K temperaturda kinematik özlülüyü tədqiq edilmişdir, KBr-in 0-0,05 molyar hissə, polietilenqlikolun isə 0-5 q/dl konsentrasiya intervalına baxılmışdır və polietilenqlikolun molekul kütlələri 1000, 1500, 3000, 4000 və 6000 olan fraksiyaları götürülmüşdür. İstifadə olunmuş KBr və PEQ-lər kimyəvi safdırlar. Məhlullar qravimetrik üsulla hazırlanmışdır. Məhlulların hazırlanmasında bidistillə edilmiş sudan istifadə olunmuşdur. Nümunələrin hazırlanması zamanı analitik tərəzidən istifadə

olunmuşdur və ölçmələr 0,0001 q dəqiqliklə çəkilmişdir. İşdə özlülük kapilyar viskozimetrlə ölçülmüşdür. Təcrübə normal atmosfer təzyiqində aparılmışdır. Viskozimetrdə mayenin axma müddəti $\pm 0,01$ san dəqiqliklə təyin edilmişdir. Bütün ölçmələr üç dəfə aparılmışdır və eksperimentin nəticəsi olaraq onların orta qiymətləri götürülmüşdür. Etalon maye olaraq su seçilmişdir və suyun özlülüynün qiymətləri [13] işindən götürülmüşdür. Məhlulların özlülüynü 293,15 K temperaturda ölçülmüşdür və temperaturu sabit saxlamaq üçün viskozimetr termostatda yerləşdirilmişdir. Temperatur $\pm 0,05$ K dəqiqliklə ölçülmüşdür. Təcrübənin maksimal nisbi xətası 0,7 % olmuşdur.

Alınmış nəticələrin müzakirəsi

Kinematik özlülüynü təcrübə qiymətlərinə əsasən (1) ifadəsi ilə baxılan molekulların kütləli PEQ-lər üçün tədqiq olunan konsentrasiya intervalında və 293,15 K temperaturda sulu məhlulların gətirilmiş özlülükləri təyin edilmişdir. Qeyd edək ki, tədqiq olunan bütün sulu məhlulların kinematik özlülükləri KBr-in baxılan konsentrasiyası (x) intervalında x -in artması ilə azalır. Gətirilmiş özlülüklərin qiymətlərinə əsasən (2) ifadəsi ilə KBr-in baxılan konsentrasiyalarına və müxtəlif molekulların kütləli PEQ-lərə uyğun sulu məhlullarının 293,15 K temperaturda xarakteristik özlülüynü ($[\eta]$) və Haggins sabiti (K_H) hesablanmışdır (cədvəl 1).

Cədvəl 1-dən göründüyü kimi, xarakteristik özlülüynü qiyməti PEQ-nin molekulların kütləsinin artması ilə artır, KBr-in konsentrasiyasının artması ilə azalır. Məhlulun xarakteristik özlülüynü həlledici mühitdə polimer molekullarının fırlanması nəticəsində yaranan əlavə özlülükdür [10-12]. (7) və (8) ifadələrindən görünür ki, xarakteristik özlülük makromolekulun ölçülərilə düz mütənasibdir ($[\eta] \sim R_h^3$, $[\eta] \sim R_g^3$). Molekulların kütləsinin artması ilə həm PEQ makromolekulunun ölçüsünün böyüməsi, həm də su molekulları ilə daha çox qarşılıqlı təsirdə olması (hidrogen rabitəsi ilə) nəticəsində onun mühitdə fırlanması çətinləşir və bu səbəbdən xarakteristik özlülük artır. Güman edirik ki, götürülmüş molekulların kütləli PEQ üçün xarakteristik özlülüynü KBr-in konsentrasiyasından asılı olaraq azalması konsentrasiyanın artması ilə PEQ makromolekulunun həcmi kiçilməsi nəticəsində olur. Belə ki, KBr-in konsentrasiyasının artması ilə həm məhlulun özlülüynü azalır, həm də PEQ makromolekulunun həcmi kiçilir, nəticədə makromolekulun mühitdə fırlanması asanlaşır. Xarakteristik özlülüynü KBr-in konsentrasiyasından asılılığı onu göstərir ki, konsentrasiyanın artması ilə PEQ makromolekulunun konformasiyası və ölçüləri dəyişir.

Su-PEQ-KBr sistemlərində müxtəlif molekulların kütləli PEQ-lər üçün xarakteristik özlülüyün ($[\eta]$, dl/g) və Haggins sabitinin (K_H) KBr-in konsentrasiyasından (x) asılılığı ($T=293,15 K$)

x	PEQ-1000	PEQ-1500	PEQ-3000	PEQ-4000	PEQ-6000
$[\eta], dl/g$					
0	0,0341	0,0471	0,0675	0,0837	0,1343
0,01	0,0328	0,0452	0,0675	0,0840	0,1296
0,02	0,0308	0,0435	0,0635	0,0822	0,1233
0,03	0,0289	0,0432	0,0649	0,0777	0,1188
0,04	0,0295	0,0402	0,0606	0,0753	0,1222
0,05	0,0263	0,0395	0,0612	0,0745	0,1116
K_H					
0	5,269	3,627	1,998	1,433	1,117
0,01	6,286	3,889	1,907	1,535	1,236
0,02	6,327	4,881	2,666	1,975	1,547
0,03	7,948	5,110	2,681	2,037	1,998
0,04	7,799	6,403	3,312	2,521	1,985
0,05	10,171	7,078	3,444	3,133	2,485

Cədvəl 1-dən görüldüyü kimi, tədqiq olunan məhlullarda Haggins sabitinin qiyməti PEQ-nin molyar kütləsinin artması ilə azalır, KBr-in konsentrasiyasının artması ilə artır. Haggins sabiti sistemdəki zərrəciklərin qarşılıqlı təsirinin intensivliyini xarakterizə edir [12]. Yəni verilmiş polimer üçün həlledici nə qədər pis olarsa Haggins sabitinin qiyməti də bir o qədər böyük olur. Verilmiş temperaturda molekulların kütləsinin artması ilə Haggins sabitinin qiymətinin azalması onu göstərir ki, su-KBr sistemi, nisbətən böyük molekulların kütləli PEQ üçün daha yaxşı həlledicidir. Yəni molekulların kütləsinin artması ilə PEQ-nin suda həllolması yaxşılaşır. Bunu su və PEQ molekullarının qarşılıqlı təsiri nəticəsində yaranan PEQ makromolekulunun hidratlaşması ilə izah etmək olar. Görünür, molekulların kütləsinin artması ilə PEQ makromolekulunun ətrafında toplanan su molekullarının sayı da artır ki, bu da Haggins sabitinin qiymətinin azalmasına səbəb olur. Götürülmüş molekulların kütləli PEQ üçün KBr-in konsentrasiyasının artması ilə Haggins sabitinin qiymətinin artması onu göstərir ki, konsentrasiyanın artması ilə PEQ-nin suda həllolması pisləşir. Bu yəqin ki, məhlulda K^+ və Br^- ionlarının hidratlaşması hesabına olur. Belə ki, su-PEQ sistemlərində yalnız PEQ makromolekulları hidratlaşdırsa, su-PEQ-KBr sistemlərində həm PEQ makromolekulları, həm də K^+ və Br^- ionları da hidratlaşır. Bu da məhlulda K^+ və Br^- ionlarının sayının artması ilə PEQ-nin suda həllolmasının pisləşməsinə səbəb olur.

Su-PEQ-KBr sistemlərində Mark-Kun-Xauvinq düsturundakı α parametrinin KBr-in konsentrasiyasından (x) asılılığı ($T=293,15 K$).

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
α	0,715	0,729	0,737	0,742	0,750	0,767

Mark-Kun-Xauvinq düsturuna daxil olan α parametri, məhlulda polimer molekulunun formasını müəyyənləşdirməyə imkan verən kəmiyyətdir və polimer molekulunun formasını dəyişdirən istənilən qarşılıqlı təsir α -nın qiymətini dəyişdirir. α -nın qiyməti sıfırla iki arasında dəyişir ($0 \leq \alpha \leq 2$). Makromolekulun kip yığılıb kürə şəklində olduğu və ətrafdakı mayenin bu yumağa nüfuz edə bilmədiyi hal üçün $\alpha = 0$ olur. θ -həllədicidə yumaq formalı həyəcanlanmamış makromolekul üçün $\alpha = 0,5$ olur. Sərt çubuqvari makromolekullar üçün $\alpha = 2$ olur [12-14]. Mark-Kun-Xauvinq düsturuna daxil olan α parametrinin KBr-in konsentrasiyasından asılılığı cədvəl 2-də göstərilmişdir. Tədqiqatlarımız göstərir ki, α parametri 293,15 K temperaturda və KBr-in baxdığımız konsentrasiyalarında (0,71-0,77) intervalında qiymətlər alır. Onda yuxarıdakı mülahizələrə əsaslanaraq deyə bilərik ki, PEQ makromolekulu su-KBr mühitində ətrafdakı mayenin nüfuz edə bildiyi yumaq formasındadır. Yəni PEQ makromolekulu su-KBr mühitində yaxşı həllədicidə mütəhərrik zəncirli şişmiş yumaq formasına malik olur [13-15]. Cədvəl 2-dən görünür ki, α parametri KBr-in konsentrasiyasının artması ilə qismən artır. Bu isə onu göstərir ki, məhlulda KBr-in konsentrasiyasının artması ilə, az da olsa bu molekulyar yumaq açılır.

Su-PEQ-KBr sistemlərinin xarakteristik özlülüyünün ($[\eta]$) qiymətlərinə əsasən (cədvəl 1) (6) ifadəsinə əsasən θ -konstant K_θ təyin edilmiş və K_θ -nın məlum qiymətlərinə əsasən (5) ifadəsi ilə PEQ-nin tədqiq olunmuş sistemə uyğun seçilmiş θ -həllədicidə xarakteristik özlülüyü ($[\eta]_\theta$) hesablanmışdır (cədvəl 3). Cədvəl 3-dən görünür ki, PEQ-nin θ -həllədicidə xarakteristik özlülüyünün qiyməti su-PEQ-KBr sistemində olduğu kimi PEQ-nin molyar kütləsinin artması ilə artır, KBr-in konsentrasiyasının artması ilə azalır. PEQ-nin θ -həllədicidə xarakteristik özlülüyünün PEQ-nin molyar kütləsindən ($[\eta]_\theta \sim M$) asılı olaraq dəyişməsinə həllədiçi su-KBr olduqda xarakteristik özlülüyün molyar kütlədən ($[\eta] \sim M$) asılılığına analogi izah etmək olar. Məlumdur ki, θ -həllədicidə polimer molekulları ilə həllədiçi molekulları qarşılıqlı təsirdə olurlar, yəni θ -həllədicidə polimer makromolekulları həyəcanlanmamış olur və bu hal üçün $\alpha = 0,5$ sabit qalır [5, 14]. Odur ki, θ -həllədicidə verilmiş molekul kütləli PEQ üçün KBr-in konsentrasiyasından asılı olaraq molekulyar yumağın yığılması və ya açılması baş vermir. Güman edirik ki, götürülmüş molekul kütləli PEQ üçün KBr-in konsentrasiyasının artması ilə $[\eta]_\theta$ -nin

azalması molekulyar yumağın həcmnin ($[\eta]_{\theta} \sim R_{\theta_1}^3$, $[\eta]_{\theta} \sim R_{\theta_2}^3$) və θ -həllədici mühitin özlülüyünün qismən azalması nəticəsində olur.

Cədvəl 3

Su-PEQ-KBr sistemlərinə uyğun seçilmiş θ -həllədiciyə müxtəlif molekulyar kütləli PEQ-lər üçün xarakteristik özlülüyün ($[\eta]_0$, dI/q) və PEQ makromolekulunun şişmə əmsalının (β) KBr-in konsentrasiyasından (x) asılılığı ($T=293,15\text{ K}$).

x	PEQ-1000	PEQ-1500	PEQ-3000	PEQ-4000	PEQ-6000
$[\eta]_0, dl/g$					
0	0,0212	0,0259	0,0367	0,0423	0,0519
0,01	0,0200	0,0245	0,0347	0,0400	0,0490
0,02	0,0187	0,0229	0,0323	0,0373	0,0457
0,03	0,0184	0,0225	0,0319	0,0368	0,0451
0,04	0,0161	0,0197	0,0278	0,0321	0,0393
0,05	0,0156	0,0191	0,0271	0,0312	0,0383
β					
0	1,172	1,220	1,226	1,255	1,373
0,01	1,179	1,226	1,248	1,280	1,383
0,02	1,182	1,239	1,252	1,301	1,392
0,03	1,163	1,242	1,268	1,283	1,381
0,04	1,225	1,270	1,296	1,329	1,459
0,05	1,190	1,273	1,313	1,336	1,429

İdeal olmayan həllədiciyə polimer yumağının ölçüsü onun həllədiciyə şişməsi nəticəsində θ -həllədiciyə olduğundan β dəfə böyük olur. Su-PEQ-KBr sisteminin və bu sistemə uyğun seçilmiş θ -həllədiciyə xarakteristik özlülüyünün qiymətlərinə görə (9) ifadəsinə əsasən makromolekul yumağının β şişmə əmsalı hesablanmışdır (cədvəl 3). Cədvəl 3-dən görünür ki, PEQ makromolekulunun su-KBr sistemində şişmə əmsalı həm PEQ-nin molyar kütləsinin, həm də məhlulda KBr-in konsentrasiyasının artması ilə artır. PEQ-nin molekulyar kütləsinin artması ilə β -nin artması yəqin ki, PEQ-nin hidratlaşması (hidrogen rabitəsi ilə) ilə əlaqədardır. Belə ki, molekulyar kütləsi nisbətən böyük olan PEQ daha çox hidratlaşır. Məhlulda KBr-in konsentrasiyasının artması ilə β -nin artması yəqin ki, məhlulda K^+ və Br^- ionlarının hidratlaşması, həmçinin mühitin özlülüyünün azalması ilə əlaqədardır.

Məhlulda su-PEQ-KBr sistemində həyəcənlanmış ($\langle h \rangle$) və θ -həllədiciyə həyəcənlanmamış ($\langle h_{\theta} \rangle$) PEQ makromolekulunun zəncirinin ucları arasındakı orta kvadratik məsafə (7) ifadələri ilə hesablanmışdır (cədvəl 4). Cədvəl 4-dən görüldüyü kimi, həm həyəcənlanmış, həm də həyəcənlanmamış PEQ makromolekulunun zəncirinin ucları arasındakı orta kvadratik məsafə PEQ-nin molyar kütləsinin artması ilə artır, məhlulda KBr-in konsentrasiyasının artması ilə azalır.

Su-PEQ-KBr sistemlərində və bu sistemlərə uyğun seçilmiş θ -həllediciləridə PEQ makromolekulunun zəncirinin ucları arasındakı orta kvadratik məsafənin ($\langle h \rangle$ və $\langle h_\theta \rangle$, Å) KBr-in konsentrasiyasından (x) asılılığı ($T=293,15 K$)

x	PEQ-1000	PEQ-1500	PEQ-3000	PEQ-4000	PEQ-6000
$\langle h \rangle$, Å					
0	25,33	32,28	45,86	54,21	72,67
0,01	25,00	31,84	45,85	54,28	71,81
0,02	24,48	31,44	44,94	53,90	70,63
0,03	23,96	31,36	45,26	52,90	69,76
0,04	24,13	30,63	44,23	52,35	70,42
0,05	23,22	30,44	44,39	52,16	68,32
$\langle h_\theta \rangle$, Å					
0	21,60	26,46	37,42	43,20	52,91
0,01	21,20	25,97	36,73	42,41	51,94
0,02	20,71	25,37	35,88	41,43	50,74
0,03	20,61	25,25	35,70	41,23	50,49
0,04	19,70	24,13	34,12	39,40	48,26
0,05	19,52	23,91	33,81	39,04	47,82

Məhlulda polimer makromolekulunun konformasiyasının müəyyən bir formaya malik olmasında molekul zəncirinin sərtliyinin və mütəhərrikiyinin böyük rolu var. Makromolekul zəncirinin sərtliyini və mütəhərrikiyini xarakterizə edən ən vacib parametrlər Kun seqmentinin uzunluğudur (A). Əgər zəncir olduqca mütəhərrikdirsə, onda Kun seqmentinin uzunluğu bir halqanın kontur uzunluğuna bərabər olur, əgər zəncir olduqca sərtdirsə, onda zəncirin tam uzunluğu L -ə bərabər olur. Su-PEQ-KBr sistemləri üçün məhlulda həyəcanlanmış (A) və θ -həlledicidə həyəcanlanmamış (A_θ) PEQ makromolekulu üçün (10) ifadələri ilə hesablanmış Kun seqmentinin uzunluğunun KBr-in konsentrasiyasından asılılığı cədvəl 5-də verilmişdir.

Su-PEQ-KBr sistemlərində və bu sistemlərə uyğun seçilmiş θ -həllediciləridə Kun seqmentinin uzunluğunun (A və A_θ , Å) KBr-in konsentrasiyasından (x) asılılığı ($T=293,15 K$)

x	PEQ-1000	PEQ-1500	PEQ-3000	PEQ-4000	PEQ-6000	A_θ , Å
	A , Å					
0	11,96	12,95	13,07	13,70	16,41	8,70
0,01	11,65	12,60	13,07	13,73	16,02	8,38
0,02	11,17	12,28	12,55	13,54	15,50	8,00
0,03	10,71	12,22	12,73	13,04	15,12	7,92
0,04	10,85	11,66	12,16	12,77	15,41	7,24
0,05	10,05	11,52	12,24	12,68	14,50	7,11

Cədvəl 5-dən göründüyü kimi, su-PEQ-KBr sistemlərində həyəcanlanmış PEQ makromolekulunun Kun seqmentinin uzunluğu PEQ-nin molekul kütləsinin artması ilə artır, məhlulda KBr-in konsentrasiyasının artması ilə azalır. θ -həllədicidə həyəcanlanmamış PEQ makromolekulunun Kun seqmentinin uzunluğu isə PEQ-nin molekul kütləsindən asılı deyil və KBr-in konsentrasiyasının artması ilə azalır (cədvəl 5). Su-PEQ-KBr sistemləri üçün baxdığımız bütün hallarda Kun seqmentinin uzunluğunun 100 Å-dən kiçik olduğu üçün, PEQ-i mütəhərrik polimer hesab etmək olar.

Beləliklə, alınmış nəticələr onu deməyə imkan verir ki, su-KBr sistemində PEQ-nin həllolması, PEQ-nin molekul kütləsinin artması ilə yaxşılaşır, KBr-in konsentrasiyasının artması ilə isə pisləşir; PEQ makromolekulu su-KBr mühitində ətrafdakı mayenin nüfuz edə bildiyi yumaq formasındadır; KBr-in konsentrasiyasının artması ilə həm su-KBr sistemində, həm də θ -həllədicidə yumağın ölçüləri kiçilir, mütəhərrikliyi isə artır.

ƏDƏBİYYAT

1. Parmoona G., Mohammadi Nafchib A., Pirdashtic M. Phys. Chem. Res., 2019, Vol. 7, №4, p. 859-884.
2. Tang Z., Fang K., Song Y., Sun F. J. Polymers 2019, 11, p.739.
3. Ji Chen, Scott K. Spear, Jonathan G. Huddleston, Robin D. Rogers. J. Green Chem., 2005, 7, 64–82
4. Sung J.H., Lee D.C., Park H.J. Polymer, 2007, Vol. 48, p.4205-4212.
5. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш., Гаджиева Ш.Н. Жур. физ. химии, 2019, том 93, № 6, с. 845-849.
6. Ланге К.Р. Поверхностно-активные вещества, синтез, свойства, анализ, применение. СПб.: Профессия, 2005. 240 с.
7. Сибилева М.А., Тарасова Э.А. Жур. физ. химии. 2004, т.78, №7, с. 1240-1244.
8. Polik W.F, Burchard W. Macromolecules, 1983, Vol. 16, p. 978-982.
9. Duval M. Macromolecules, 2000, Vol. 33, p.7862-7867.
10. Шуляк И.В., Грушова Е.И. Жур. физ. химии. 2013 т.87, №12, с. 2079-2084.
11. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш., Мусаева С.И. Жур. физ. химии, 2013, том 87, № 12, с. 2151-2153.
12. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш. Жур. физ. химии, 2019, том 93, № 5, с. 779-781.
13. Məsimov E.Ə., Nəşənov H.Ş., Paşayev B.G. Mayələrin özlülüyü. Bakı, "Ləman Nəşriyyat Poliqrafiya", 2016. 285 с.
14. Тагер А.А. Физикохимия полимеров. М.: Научный мир, 2007. 576 с.
15. Рафиков С.Р., Будтов В.П., Монаков Ю.Б. Под ред. В.В. Коршака. Введение в физико-химию растворов полимеров. М.: Наука, 1978. 328с.
16. Цветков В.Н., Эскин В.Е., Френкель С.Я. Структура макромолекул в растворах. М.: Наука, 1964.
17. Stokmayer W.H., Fixman M. J. Polym. Sci. 1963. Part C. №1. p.137.
18. Манжай В.Н., Сарычева Г.А., Березина Е.М. Высокомолекулярные соединения, серия В, 2003, том 45, № 2, с. 363-368.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНФОРМАЦИИ И РАЗМЕРОВ МАКРОМОЛЕКУЛ ПЭГ В СИСТЕМАХ ВОДА-ПЭГ-KBr

Э.А.МАСИМОВ, Б.Г.ПАШАЕВ, М.Р.РАДЖАБОВ, Л.П.АЛИЕВ

РЕЗЮМЕ

В работе исследована кинематическая вязкость систем вода-ПЭГ-KBr в интервале температур 293,15 К, 0-0,05 мольной доли KBr и концентрации ПЭГ в интервале 0-5 г/дл. Рассмотрены фракции ПЭГ различных молекулярных масс (1000, 1500, 3000, 4000 и 6000). На основании экспериментальных данных по кинематической вязкости при данной концентрации KBr вычислены: характеристическая вязкость исследуемых растворов, константа Хаггинса, параметр α в уравнение Марка-Кун-Хаувинга, коэффициент набухания макромолекул ПЭГ, характеристическая вязкость в θ -растворителе, среднеквадратичное расстояние макромолекулярной цепи ПЭГ в растворе и в θ -растворителе, длина сегмента Куна в растворе и в θ -растворителе. Установлено, что макромолекулярный клубок ПЭГ проницаем для окружающей жидкости (вода-KBr), и с увеличением концентрации KBr объем клубка уменьшается, а гибкость увеличивается.

Ключевые слова: KBr, полиэтиленгликоль, характеристическая вязкость, константа Хаггинса, среднеквадратичное расстояние, коэффициент набухания, сегмент Куна.

DETERMINATION OF CONFORMATION AND DIMENSIONS OF PEG MACROMOLECULE IN THE SYSTEMS WATER-PEG-KBr

E.A.MASIMOV, B.G.PASHAYEV, M.R.RAJABOV, L.P.ALIYEV

SUMMARY

Here, the kinematic viscosity of water-PEG-KBr systems at temperature 293.15 K and 0-0.05 molar part of KBr, and at a concentration range of 0-5 g/dl of PEG was investigated, PEG molecules with a molecular weight of 1000, 1500, 3000, 4000 and 6000 were taken. Based on the experimental estimates of the kinematic viscosity, at the studied range of concentration interval intrinsic viscosity of studied solution, Haggins constant, the α parameter included in the Mark-Kuhn-Houwink formula, swelling coefficient of PEG macromolecule, intrinsic viscosity of the θ -solvent, root-mean-square distance between the ends of the PEG chain θ -solvent and in the solution, the length of the Kuhn segment of θ -solvent and in the solution was calculated. PEG in macromolecules was found to be in a water-KBr medium in the form of a coil that can penetrate the surrounding fluid and as the concentration of KBr increases, the volume of this coil decreases and their urgency increases.

Key words: KBr, polyethylene glycol, intrinsic viscosity, root-mean-square distance between the end of polymer chain, swelling coefficient, Kuhn segment.

УДК 539.2

КОЛЕБАНИЯ ТОКА В ПРИМЕСНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ ПРИ НАЛИЧИИ СЛАБОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ($\mu_{\pm} H_0 \ll c$)

Э.Р.ГАСАНОВ^{*,**}, Ш.Г. ХАЛИЛОВА^{*}, Р.К.МУСТАФАЕВА^{*}

^{*}Бакинский Государственный Университет

^{**}Институт Физики Национальной Академии Наук Азербайджана
bsu.edu.gov.az

Теоретически показано, что в слабом магнитном поле примесный полупроводник излучает энергию с определенной частотой. Найдены предел изменения внешнего электрического поля и значения частоты колебания тока. Утверждено, что в таких полупроводниках инжекция контактов играет главную роль для появления указанного колебания тока в цепи.

Ключевые слова: электрическое поле, слабое магнитное поле, импеданс, градиента температуры, электроны, дырки.

В проводящих средах под влиянием внешнего электрического поля, носители заряда получают от электрического поля дополнительную энергию порядка eEl (e - элементарный заряд, \vec{E} - напряженность электрического поле, l - длина свободного пробега носителей заряда). Энергия этих носителей заряда имеет порядок $\frac{3}{2}k_0T + eEl$ (k_0 - постоянная Больцмана, T - температура решетки). При этом происходит перераспределения носителей заряда по среде неравномерным образом, которые распространяются в виде волны внутри среды. Эти волны могут быть неустойчивыми, и из кристалла начинается излучения энергии. Механизм и причина возникновения неустойчивых волн в разных проводящих средах являются различными. Поэтому для теоретического исследования неустойчивых состояний требуются разные математические подходы. Если возбуждаемая волна внутри среды не выходит наружу (т.е. колебания тока во внешней среде отсутствует), тогда частота этой волны комплексная величина, а волновой вектор вещественная величина. При обратном случае (т.е. частота $w = w_0$, волновой вектор $k = k_0 + ik'$) возникает колебания тока во внешней цепи, и среда излучает энергию с частотой w_0 .

В работах [1-6] теоретически исследованы разные неустойчивости в полупроводниковых средах и получили некоторые аналитические формулы для внешнего электрического поля и для частоты колебания тока.

Однако в примесных полупроводниках возбуждения неустойчивых волн зависит от многих факторов из-за наличия в среде разных примесных центров. Примесные центры в зависимости от зарядовых состояний способны захватить рекомбинация носителей заряда. Эти рекомбинационные и генерационные процессы могут возбуждать неустойчивые волны внутри среды. Атомы золота в германии, кроме нейтрального состояния, могут быть однократно, двукратно и трехкратно отрицательно заряженными центрами. Эти примесные уровни расположены на разных расстояниях от зоны проводимости полупроводника. В зависимости от температуры полупроводника эти энергетические уровни являются более или менее активными уровнями. В экспериментальной работе [7] активными были однократно и двукратно отрицательные уровни. Мы в дальнейшем будем использовать модель эксперимента [7]. Понятно, что вокруг отрицательного заряда имеется кулоновский барьер. Электроны, получившие энергии от внешнего электрического поля могут преодолеть этот кулоновский барьер и захватиться. Электроны в результате теплового переброса могут из примесного центра выходить в зоны проводимости. Вследствие захвата электронов примесными центрами из валентной зоны увеличивается число дырок. В результате рекомбинации и генерации электронов и дырок изменяется электропроводность полупроводника.

В работах [1-6] подробно изложен анализ кинетических уравнений в полупроводнике с однократно и двукратно отрицательно заряженными центрами. В этих работах изложены результаты теоретического исследования внутренней и внешней неустойчивости. Однако, равновесные значения концентраций электронов и дырок являлись произвольными. Мы в этой теоретической работе будем исследовать колебания тока (т.е. внешняя неустойчивость) в полупроводниках с однократно и двукратно отрицательными примесными центрами во-внешнем и электрическом E_0 поле при наличии слабых магнитных полей (т.е. $\mu_{\pm} H_0 \ll c$, μ_{\pm} - подвижности дырок и электронов, c - скорость света). С учетом инжекции на контактах полупроводника, когда концентрация электронов n_- и дырок n_+ определяются из соотношения $n_+ \mu_- = n_- \mu_+$. Кроме выше указанных условий полупроводнике имеется постоянный градиент температуры $\nabla T = const$.

Основные уравнения задачи

Уравнения кинетики для электронов и дырок в полупроводниках вышеуказанными примесными центрами имеют вид [1-7]:

$$\frac{\partial n'_-}{\partial t} + \text{div} j'_- = v_- n'_- - \frac{v'_-}{v_- - i\omega} \left[v_+ n'_+ + v_- n'_- + (v_+^E n_{1+} \beta_+^\gamma + v_- n_- \beta_-^\gamma) \frac{e(\mu_+ n'_+ + \mu_- n'_-)}{\sigma + \sigma_1} \right] +$$

$$+ v_- n_- \beta_-^\gamma \frac{e(\mu_+ n'_+ + \mu_- n'_-)}{\sigma + \sigma_1} \quad (1)$$

$$\frac{\partial n'_+}{\partial t} + \text{div} j'_+ = -v_+ n'_+ + \frac{v'_+}{v_+ - i\omega} \left[v_+ n'_+ + v_- n'_- + (v_+^E n_{1+} \beta_+^\gamma + v_- n_- \beta_-^\gamma) \frac{e(\mu_+ n'_+ + \mu_- n'_-)}{\sigma + \sigma_1} \right] -$$

$$- v_+^E n_{1+} \beta_+^\gamma \frac{e(\mu_+ n'_+ + \mu_- n'_-)}{\sigma + \sigma_1} \quad (2)$$

$$\beta_\pm = 2 \frac{d \ln \mu_\pm}{d \ln(E_0^2)}; \quad \bar{\vartheta}_\pm = \mu_\pm \bar{E}_0; \quad \beta_\pm^\gamma = 2 \frac{d \ln \gamma_\pm}{d \ln(E_0^2)}; \quad n'_\pm \ll n_\pm^0; \quad E' \ll E_0; \quad T \ll eE_0 l;$$

$T = k_0 T$; T_0 - температура решетки, l - длина свободного пробега, $v_- = \gamma_-(E_0) N_0$ - частота захвата электронов, $v_+ = \gamma_+(E_0) N_-^0$ - частота захвата дырок, $v_+^E = \gamma_+(E_0) N_0$ - частота испускания дырок, $n_{1-} = \frac{n_-^0 N_0}{N_-^0}$, $n_{1+} = \frac{n_+^0 N_-^0}{N_0}$, $N_0 = N_+ N_-$ - полная концентрация примесей, N - однократно отрицательно заряженными центрами, N_- - двукратно отрицательно заряженными центрами $N \gg N_-$, $\sigma = \sigma_+ + \sigma_- = e(n_+ \mu_+ + n_- \mu_-)$, $\sigma_1 = e(n_+ \mu_+ \beta_+ + n_- \mu_- \beta_-)$, $v = v'_+ + v'_-$ - комбинированная частота захвата и испускания электронов и дырок неравновесными ловушками $(N_0, N_-^0) \gg (n_\pm^0)$.

Теория

При наличии внешнего магнитного поля и градиента температуры плотности токов для электронов и дырок имеют вид:

$$\vec{j}_- = -n_- \mu_- E^* - n_- \mu_- [E^* H] - \alpha_- \bar{\nabla} T - \alpha'_- [\bar{\nabla} T \bar{H}]$$

$$\vec{j}_+ = n_+ \mu_+ E^* + n_+ \mu_+ [E^* H] + \alpha_+ \bar{\nabla} T + \alpha'_+ [\bar{\nabla} T \bar{H}] \quad (3)$$

$$\vec{J} = e(\vec{j}_+ - \vec{j}_-) \quad (4)$$

Подставляя (3) в (4) находим

$$E^* = \frac{\vec{J}}{\sigma} - \frac{\sigma_1}{\sigma} [\bar{E}^* \bar{H}] - \frac{\alpha}{\sigma} \bar{\nabla} T + \frac{\alpha_1}{\sigma} [\bar{\nabla} T \bar{H}] \quad (5)$$

Здесь $\sigma = \sigma_+ + \sigma_-$, $\alpha = \alpha_+ + \alpha_-$, $\alpha_1 = \alpha'_+ + \alpha'_-$.

В работе [8] доказано, что при наличии магнитного поля и градиента температуры возникает гидродинамического движения носителей заряда, и электрическое поле внутри среды имеет вид:

$$E^* = \bar{E} + \frac{[\bar{V}\bar{H}]}{e} + \frac{T}{e} \left(\frac{\nabla n'_-}{n_-^0} - \frac{\nabla n'_+}{n_+^0} \right) \quad (6)$$

Сначала находим \bar{E}^* из уравнения (5). Напишем (5) в следующем виде

$$\bar{E}^* = \bar{A} + \frac{\sigma_1}{\sigma} [\bar{H}\bar{E}^*] \quad (7)$$

При $\bar{B} = \frac{\sigma_1}{\sigma} \bar{H}$. Тогда

$$\bar{E}^* = \bar{A} + [\bar{B}\bar{E}^*] \quad (8)$$

И уравнения (8) получим:

$$\bar{E}^* = \bar{A} + [\bar{B}\bar{A}] + [\bar{B}[\bar{B}\bar{E}^*]] \quad (9)$$

Раскрывая векторное произведение в (9) при $\mu_{\pm}H_0 \ll c$ и подставляя полученное выражения для \bar{E}^* в (6) получим для электрического поля выражения

$$\bar{E} = -\frac{[\bar{V}\bar{H}]}{c} - \frac{A'}{\sigma} [\bar{V}T\bar{H}] + \frac{\bar{J}}{\sigma} - \frac{\sigma_1}{\sigma^2} [\bar{J}\bar{H}] + A\bar{V}T + \frac{T}{e} \left(\frac{\nabla n'_-}{n_-^0} - \frac{\nabla n'_+}{n_+^0} \right) \quad (10)$$

Подставляя (3-4) с учетом (10) в (1)-(2) получим следующие дисперсионные уравнения для определения волновых векторов k_1 и k_2 .

$$x^4 - ux^2 + fx - \delta_0 + i\delta_1 = 0, \quad x = L_x k \quad (11)$$

Здесь

$$u = \frac{1}{\varphi_- \varphi_+ \alpha^2}, \quad \varphi_{\mp} = \frac{\mu_{\mp} H_0}{c}, \quad \alpha^2 = \frac{1}{8\varphi_- \varphi_+} \frac{\omega}{v_+}, \quad f = \frac{L_x \vartheta \omega}{\mu_- \mu_+ E_2^2 \alpha^2},$$

$$\delta_0 = \frac{L_x (v_- v_+ - \omega^2)}{\mu_- \mu_+ E_2^2 \alpha^2 \varphi_- \varphi_+}, \quad \delta_1 = \frac{L_x^2 \omega v_-}{\mu_- \mu_+ E_2^2 \alpha^2 \varphi_- \varphi_+}, \quad E_2 = \frac{T}{eL_x}$$

Решение уравнения (11) в общем виде очень сложно. Поэтому, мы будем исследовать колебания рассматриваемой среде с частотами

$$\varpi = \pm (v_- v_+)^{1/2} \quad (12)$$

С учетом (12) из (11) получим:

$$x_1 = u^{1/2} - i \frac{\delta_1}{2u^{3/2}}, \quad x_2 = -u^{1/2} - i \frac{\delta_1}{2u^{3/2}} \quad (13)$$

После нахождения безразмерных волновых векторов x_1 и x_2 можно вычислить импеданс среды следующим образом

$$Z = \frac{1}{J'} \int_0^l E'(x,t) dx \quad (14)$$

Находим $E'(x, t)$ из (10)

$$E'_x = \frac{J'_x}{\sigma_0 \varphi} + \frac{i\Gamma}{e\varphi} (k_1 + k_2) \left(\frac{n'_-}{n_-^0} - \frac{n'_+}{n_+^0} \right) \quad (15)$$

$$\varphi = 1 - \frac{E_1}{E_0}, \quad E_1 = \Lambda_0 \gamma \mathcal{N} T, \quad \gamma = 2 \frac{d \ln \Lambda}{d \ln(E^2)}$$

n'_- и n'_+ нужно найти с учетом инжекции, на контактах среды следующим образом

$$n'_- = c_1^- e^{ik_1 x} + c_2^- e^{ik_2 x}, \quad n'_+ = c_1^+ e^{ik_1 x} + c_2^+ e^{ik_2 x}, \quad (16)$$

при $x = 0$, $n'_\pm = \delta_\pm^0 J'_x$ и $x = L$

$n'_\pm = \delta_\pm^L J'_x$ (17) находим из (16) с учетом (17) для константов $c_{1,2}^-$ и $c_{1,2}^+$ следующие выражения

$$\begin{aligned} c_1^- &= J'_x \frac{\delta_-^0 e^{ik_2 L_x} - \delta_-^L}{e^{ik_2 L_x} - e^{ik_1 L_x}}; \quad c_2^- = J'_x \frac{\delta_-^L - \delta_-^0 e^{ik_1 L_x}}{e^{ik_2 L_x} - e^{ik_1 L_x}}; \\ c_1^+ &= J'_x \frac{\delta_+^0 e^{ik_2 L_x} - \delta_+^L}{e^{ik_2 L_x} - e^{ik_1 L_x}}; \quad c_2^+ = J'_x \frac{\delta_+^L - \delta_+^0 e^{ik_1 L_x}}{e^{ik_2 L_x} - e^{ik_1 L_x}} \end{aligned} \quad (18)$$

или

$$c_1^- = \delta_1^- J'_x, \quad c_2^- = \delta_2^- J'_x, \quad c_1^+ = \delta_1^+ J'_x, \quad c_2^+ = \delta_2^+ J'_x \quad (19)$$

Подставляя (15) с учетом (18)-(19) получим следующие выражения для импеданса среды

$$Z = \frac{T}{e\varphi} \left(1 + \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{\delta_-^-}{n_-^0} - \frac{\delta_+^+}{n_+^0} \right) \left(e^{ik_1 L_x} - 1 \right) + \frac{T}{e\varphi} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{\delta_-^-}{n_-^0} - \frac{\delta_+^+}{n_+^0} \right) \left(e^{ik_2 L_x} - 1 \right) + \frac{L_x}{\sigma_0} \right) \quad (20)$$

При получении (15) мы учитывали, что $H' = 0$, т.е. $\vec{k} \parallel \vec{E}'$.

При получении значений волновых векторов k_1 и k_2 мы учитывали неравенство

$$f_0 > \frac{\delta_1}{u^{1/2}}, \quad \text{т.е.} \quad E_0 > \frac{L_x v_-}{\mu} \frac{c}{\mu H_0} \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{\mu_-}{\mu_+} \right)^{1/4}}} = E_{char} \quad (21)$$

Подставляя $c_{1,2}^\pm$ (20) с учетом (21) получим:

$$Z = \frac{T}{e\varphi} (u - 1) \left[\frac{\delta_-^L}{n_-^0} - \frac{\delta_+^L}{n_+^0} + 2 \left(\frac{\delta_+^0}{n_+^0} - \frac{\delta_-^0}{n_-^0} \right) \right] \quad (22)$$

$$u = 4 \left(\frac{\mu_-}{\mu_+} \right)^2 \left(\frac{v_-}{v_+} \right)^{1/2}, \quad u \gg 1$$

Из (22) видно, что импеданс среды является вещественным, т.е. $J_m Z = 0$. Это означает, что при появлении колебания с частотой (12) внутри не возникает сопротивление емкостного и индуктивного характе-

ра, т.е. сопротивление является омическим. Для нахождения электрического поля при появлении колебания тока в цепи мы должны решать следующие уравнения

$$Z + R = 0 \quad (23)$$

Таким образом, уравнение (23) имеет вид:

$$Z = \pm \frac{T}{e\varphi Z_0} 4 \left(\frac{\mu_-}{\mu_+} \right)^{3/2} \left(\frac{\delta_-^L - 2\delta_-^0}{n_-^0} - \frac{\delta_+^L - 2\delta_+^0}{n_+^0} \right) + 1 + \frac{R}{Z_0} = 0, \quad (24)$$

$$Z_0 = \frac{L_x}{\sigma_0}$$

Из (24) получим следующие выражения для электрического поля при появлении колебания тока с частотой (12)

$$E_0 = \frac{E_1}{1 \pm \frac{4T}{eZ_0 r} \frac{\mu_-}{\mu_+} \left(\frac{\delta_-}{n_-^0} - \frac{\delta_+}{n_+^0} \right)} \quad (25)$$

$$\text{Здесь } r = 1 + \frac{R}{Z_0}, \quad \delta_- = \delta_-^L - 2\delta_-^0, \quad \delta_+ = \delta_+^L - 2\delta_+^0,$$

Обсуждения результатов

Покажем предельные случаи с частотой (12):

1. $\frac{\delta_-}{n_-} = \frac{\delta_+}{n_+}$, $2\delta_-^0 > \delta_-^L$ и $2\delta_+^0 > \delta_+^L$,
 $\frac{n_-}{n_+} = \frac{\delta_-^0}{\delta_+^0}$ или $\frac{n_-^0}{n_+^0} = \frac{\delta_-^L}{\delta_+^L}$; $E_0 = E_1$; $\varpi = \pm(v_-v_+)^{1/2}$;
2. $\frac{n_-^0}{n_+^0} < \frac{\delta_-^L}{\delta_+^L}$ или $\frac{n_-^0}{n_+^0} < \frac{\delta_-^0}{\delta_+^0}$; $E_0 < E_1$; $\varpi = (v_-v_+)^{1/2}$;
3. $\frac{n_-^0}{n_+^0} > \frac{\delta_-^L}{\delta_+^L}$ или $\frac{n_-^0}{n_+^0} > \frac{\delta_-^0}{\delta_+^0}$; $E_0 < E_1$; $\varpi = -(v_-v_+)^{1/2}$;
4. $\frac{n_-^0}{n_+^0} < \frac{\delta_-^L}{\delta_+^L}$ или $\frac{n_-^0}{n_+^0} < \frac{\delta_-^0}{\delta_+^0}$; $E_0 > E_1$; $\varpi = -(v_-v_+)^{1/2}$.

Таким образом, значения внешнего электрического поля во всех перечисленных случаях превышает характерного поля E_{char} , но не превышает значению E_1 , излучение среды происходит тогда, когда E_0 меняется от E_{char} до E_1 .

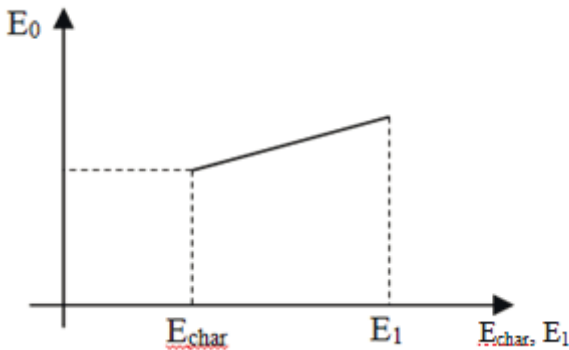


Рис. Зависимость электрического поля от характерного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hasanov E.R., Rasoul Nezhad Hosseyn, Az.Panahov and Ali Ihsan Demirel, “Instability in Semiconductors with Deep Traps in the Presence of Strong ($\mu_{\pm} H \gg C$)”, Advanced Studies in Theoretical Physics., Year 2011, Vol. 5 N 1, p.25-30.
2. Demirel A.I., Panahov A.Z., E.R.Hasanov. Radiations of electron –type conductivity environments in electric and magnetic field, Advanced Studies in Theoretical Physics, 2013, vol.8, N 22, p.1077-1086,
3. Hasanov E.R., Panahov A.Z., Demirel A.I. High frequency Energy Radiation of n-type semiconductors at constant electric and magnetic field. Adv.Studies Theor.Phys. Vol.7, 2013, No21, p.1035-1042.
4. Hasanov E.R., Hasanova R.A. “External and Internal Instability in the Medium Having Electron Typ Conductivity“, IOSR Journal of Applied Physics, Volume 10, Issue 3 Ver. II (May-June. 2018), p. 18-26;
5. Aliev F.F., Hasanov E.R. “Nonlinear Oscillations of the charge the Carriers Concentration and Electric Field in Semiconductors with Deep Traps”, IOSR Journal of Applied Physics, Volume 10, Issue 1 Ver. II (Jan.-Feb. 2018), p. (36-42)
6. Hasanov E.R., Khalilova Sh.G., Tagiyeva Z.A., Ahadova S.S. Oscillation of current in electric and magnetic fields 15th International Conference on “Technical and Physical Problems of Electrical Engineering”, Istanbul, Turkey, 14-15 October 2019, pp. 103-107
7. Пель Э.Г., Первова Л.Я. и Фистул В.И. Неустойчивость электронно-дырочной плазмы полупроводника, обусловленная нелинейности вольтамперных характеристик. М.И.Иглицын. ФТТ, 1966, т. 8, вып. 12, стр. 3606.
8. Gurevich L.E. Thermomagnetic waves and excitation of the magnetic field in nonequilibrium plasmas JETP, 44, 1963, 548-555

ЗӘЙФ МАҚНІТ САҲӘСІНДӘ ($\mu_{\pm} H_0 \ll c$) АҶҚАР ЯРИМКЕҶИРИЦІЛӘРДӘ СӘРӘЯН РӘҚСЛӘРІ

E.R.HӘSƏNOV, Ҷ.Q.XƏLİLОВА, R.K.MUSTAFAYEVA

ХҮЛАСӘ

Нәзәри сәһәтдән зәйф мақнит саһәсіндә аҶқар ярімкеҶирици мүәййән бир тезликлә енерҗи сәуаландığını гөстәрилмишдир. Хариси електрик саһәсинин дәйишмә һәдди вә сәрәян рәқсләрин тез-

liklərin qiyməti tapılmışdır. Belə yarımkəçiricilərdə rəqslərin mövcudluğunda kontaktların injeksiyası böyük rol oynayır.

Açar sözlər: elektrik sahəsi, zəif maqnit sahəsi, empedans, temperatur qradient, elektronlar, dəliklər.

**CURRENT OSCILLATIONS IN IMPURITY SEMICONDUCTORS
IN THE PRESENCE OF A WEAK MAGNETIC FIELD ($\mu_{\pm}H_0 \ll c$)**

E.R.HASANOV, Sh.G.KHALILOVA, R.K.MUSTAFAEVA

SUMMARY

It is theoretically shown that in a weak magnetic field an impurity semiconductor emits energy with a certain frequency. The limit of variation of the external electric field and the value of the frequency of current oscillations are found. It is stated that contact injection plays a major role in such semiconductors for the appearance of this current oscillation in the circuit.

Keywords: electric field, weak magnetic field, impedance, temperature gradient, electrons, holes.

УДК 539.12-17

ДВУХСПИНОВАЯ АСИММЕТРИЯ В ПОЛУИНКЛЮЗИВНОМ ГЛУБОКОНЕУПРУГОМ ЛЕПТОН-НУКЛОННОМ РАССЕЙАНИИ

М.Ш.ГОДЖАЕВ

Бакинский Государственный Университет

bsu.edu.gov.az

В рамках кварк-партонной модели получены выражения для неполяризационных и поляризационных структурных функций в полуинклюзивных реакциях $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)N \rightarrow \mu^-(\mu^+)h^\pm X$, $\mu^-(\mu^+)N \rightarrow \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)h^\pm X$. Определена и подробно исследована «разностная» двухспиновая асимметрия $A_N^{h^+-h^-}$.

Ключевые слова: полуинклюзивные реакции, кварк-партонная модель, двухспиновая асимметрия, структурные функции.

PACS: 12.15.-y; 13.60.-r; 13.60.+e, 14.20.Dh

Стандартная модель (СМ) успешно описывает ряд экспериментов, проведенных в различных лабораториях мира. В частности, одно из наиболее точных ее проверок выполнена в электрон-позитронных коллайдерах LEP и SLC, где согласие с экспериментальными данными убедительное [1, 2]. Наряду с электрон-позитронной аннигиляцией, процессы глубокоэластичного рассеяния лептонов на нуклонах играют важную роль в проверке СМ и в настоящее время интенсивно исследуются экспериментально и теоретически [3-11]. Эксперименты COMPASS, HERMES, EMC, EIC, ZEUS, проведенные с поляризованными лептонами и мишенями открывают новые возможности для исследования внутренней структуры нуклонов.

В работах [10, 11] в рамках кварк-партонной модели изучены поляризационные асимметрии в процессах глубокоэластичного рассеяния лептонов на нуклонах. Однако в этих работах неполяризационные и поляризационные структурные функции адронов не рассматривались. В настоящей работе нами изучено рождение заряженного адрона h^\pm (π^\pm или K^\pm) в полуинклюзивных реакциях при глубокоэластичном рассеянии поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах. Рассматриваются нижеприведенные полуинклюзивные реакции, обусловленные обменом заряженным

W^+ (W^-) бозоном:

$$\nu_\mu + N(h_N) \rightarrow \mu^-(\lambda) + h^\pm + X, \quad (1)$$

$$\bar{\nu}_\mu + N(h_N) \rightarrow \mu^+(\lambda) + h^\pm + X, \quad (2)$$

$$\mu^-(\lambda) + N(h_N) \rightarrow \nu_\mu + h^\pm + X, \quad (3)$$

$$\mu^+(\lambda) + N(h_N) \rightarrow \bar{\nu}_\mu + h^\pm + X, \quad (4)$$

где λ – спиральность мюона (антимюона), h_N – продольная поляризация нуклона мишени, X – система недектируемых адронов. Введением структурных функций адронов получены аналитические выражения для дифференциальных сечений процессов (1)-(4) и двухспиновых асимметрий.

2. Структурные функции полуинклюзивного глубоконеупругого рассеяния

Процесс (1) описывается диаграммой Фейнмана, приведенной на рис. 1, где в скобках записаны 4-импульсы частиц. Заштрихованная область показывает, что нуклон мишень обладает внутренней структурой, которая учитывается введением структурных функций.

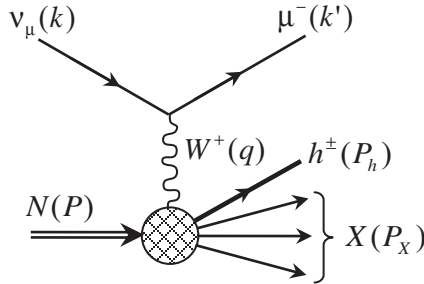


Рис. 1. Фейнмановская диаграмма полуинклюзивной реакции $\nu_\mu N \rightarrow \mu^- h^\pm X$

Для описания полуинклюзивных реакций (1)-(4) используются инвариантными переменными:

$$Q^2 = -q^2 = 2(EE' - \vec{k}\vec{k}') - m_\ell^2 - m_{\ell'}^2,$$

где m_ℓ ($m_{\ell'}$) – масса начального (конечного) лептона, если $EE' \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \gg m_\ell^2$, $m_{\ell'}^2$, то

$$Q^2 \approx 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

здесь θ – угол рассеяния лептона.

$x = \frac{Q^2}{2(P \cdot q)}$ и $y = \frac{(q \cdot P)}{(k \cdot P)}$ – обычные кинематические переменные глю-

боконеупругих процессов, $z = \frac{(P \cdot P_h)}{(P \cdot q)}$ – скейлинговая переменная, определяющая доля энергии, уносимой адроном h^\pm ;

$$S = (k + P)^2 = \frac{Q^2}{xy} + M^2 + m_\ell^2$$

– квадрат суммарной энергии лептона и нуклона.

При $Q^2 \gg M^2$ массами начального и конечного лептонов могут быть пренебрегать, и процесс называется глубоконеупругом рассеянием.

В низшем порядке теории возмущений дифференциальное эффективное сечение глубоконеупругого рассеяния поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах может быть представлено в виде

$$\frac{d^3\sigma(\lambda; h_N)}{dxdydz} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} \eta_W L_{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \quad (5)$$

где

$$\eta_W = \frac{1}{2} \left(\frac{G_F M_W^2}{4\pi\alpha} \cdot \frac{Q^2}{Q^2 + M_W^2} \right)^2, \quad (6)$$

G_F – фермиевская константа слабых взаимодействий, M_W – масса заряженного W^\pm -бозона, а $L_{\mu\nu}$ и $H_{\mu\nu}$ – лептонный и адронный тензоры.

Адронный тензор содержит три неполяризованные (F_1, F_2 и F_3) и пять поляризованные (g_1, g_2, g_3, g_4 и g_5) структурные функции:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} = & \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) F_1 + \frac{\tilde{P}_\mu \tilde{P}_\nu}{(P \cdot q)} F_2 - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q_\alpha P_\beta}{2(P \cdot q)} F_3 + \\ & + i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q_\alpha}{(P \cdot q)} \left[S_\beta g_1 + \left(S_\beta - \frac{(q \cdot S)}{(P \cdot q)} P_\beta \right) g_2 \right] + \frac{1}{(P \cdot q)} \left[\frac{1}{2} (\tilde{P}_\mu \tilde{S}_\nu + \tilde{S}_\mu \tilde{P}_\nu) - \frac{(q \cdot S)}{(P \cdot q)} \tilde{P}_\mu \tilde{P}_\nu \right] g_3 + \\ & + \frac{(S \cdot q)}{(P \cdot q)} \left[\frac{\tilde{P}_\mu \tilde{P}_\nu}{(P \cdot q)} g_4 + \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) g_5 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь S – 4-вектор поляризации нуклона, а \tilde{P}_μ и \tilde{S}_μ определяются выражениями:

$$\tilde{P}_\mu = P_\mu - \frac{(P \cdot q)}{q^2} q_\mu, \quad \tilde{S}_\mu = S_\mu - \frac{(S \cdot q)}{q^2} q_\mu.$$

Отметим, что в общем случае структурные функции зависят от инвариантных переменных x, z и Q^2 :

$$F_i(x, z, Q^2) \quad (i=1,2,3), \quad g_i(x, z, Q^2) \quad (i=1 \div 5).$$

В полуинклюзивной реакции (1) лептонный тензор имеет вид:

$$L_{\mu\nu} = 4(1-\lambda)[k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - (k \cdot k') g_{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} k_\rho k'_\sigma]. \quad (8)$$

В случае неполяризованного нуклона дифференциальное эффективное

ное сечение полуинклюзивной реакции $\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + h^\pm + X$ содержит неполяризационные структурные функции F_1, F_2 и F_3 :

$$\frac{d^3\sigma}{dxdydz} = \frac{4\pi\alpha^2}{xyQ^2} \eta_w \left[xy^2 F_1 + \left(1 - y - x^2 y^2 \frac{M^2}{Q^2} \right) F_2 + xy \left(1 - \frac{y}{2} \right) F_3 \right]. \quad (9)$$

Если же нуклон поляризован, то разность дифференциальных сечений полуинклюзивной реакции (1) при двух значениях спиральностей нуклона дается выражением:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\Delta\sigma}{dxdydz} = \frac{8\pi\alpha^2}{xyQ^2} \eta_w \left\{ \left[2 - y - 2x^2 y^2 \frac{M^2}{Q^2} \right] xy g_1 + 4x^3 y^2 \frac{M^2}{Q^2} g_2 + 2x^2 y \frac{M^2}{Q^2} \times \right. \\ \left. \times \left(1 - y - x^2 y^2 \frac{M^2}{Q^2} \right) g_3 + \left(1 + 2x^2 y \frac{M^2}{Q^2} \right) \left[\left(1 - y - x^2 y^2 \frac{M^2}{Q^2} \right) g_4 + xy^2 g_5 \right] \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

В глубоконеупругой области $Q^2 \gg M^2$ вклад в сечение поляризованных структурных функций g_2 и g_3 обращается в нуль и в этом приближении формулы дифференциальных сечений (9) и (10) могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{d^3\sigma}{dxdydz} = \frac{2\pi\alpha^2}{xyQ^2} \eta_w \{ [1 + (1 - y)^2] \cdot 2xF_1 + [1 - (1 - y)^2] \cdot xF_3 + (1 - y) \cdot 2F_L \}. \quad (11)$$

$$\frac{d^3\Delta\sigma}{dxdydz} = \frac{8\pi\alpha^2}{xyQ^2} \eta_w \{ [1 + (1 - y)^2] \cdot xg_5 + [1 - (1 - y)^2] \cdot xg_1 + (1 - y)g_L \}, \quad (12)$$

где продольные структурные функции определены формулами

$$F_L = F_2 - 2xF_1, \quad g_L = g_4 - 2xg_5. \quad (13)$$

3. «Разностная» двухспиновая асимметрия

Одним из основных величин, измеряемой в глубоконеупругих процессах (1)-(4), является так называемая «разностная» двухспиновая асимметрия

$$A_N^{h^+ - h^-} = \frac{(\sigma_{\uparrow\downarrow}^{h^+} - \sigma_{\uparrow\downarrow}^{h^-}) - (\sigma_{\uparrow\uparrow}^{h^+} - \sigma_{\uparrow\uparrow}^{h^-})}{(\sigma_{\uparrow\downarrow}^{h^+} - \sigma_{\uparrow\downarrow}^{h^-}) + (\sigma_{\uparrow\uparrow}^{h^+} - \sigma_{\uparrow\uparrow}^{h^-})}, \quad (14)$$

где $\sigma_{\uparrow\uparrow}^{h^\pm}$ ($\sigma_{\uparrow\downarrow}^{h^\pm}$) – определяет сечение рассматриваемой реакции с параллельными (антипараллельными) спинами лептона и нуклонной мишени. Рассмотрим рождение π^\pm (K^\pm) -мезонов в полуинклюзивных реакциях (1)-(4). Найдем структурные функции адронов в кварк-партоновой модели. На основе этой модели лежат гипотезы:

1) Нуклон состоит из точечных партонов, т.е. из трех валентных кварков и кварк-антикваркового моря ($q\bar{q}$). В области глубоконеупругого рассеяния нет взаимодействия между партонами, они ведут себя как сво-

бодные частицы.

2) В системе Брейта импульсы партонов направлены по направлению импульса нуклона и каждый партон носит определенную долю импульса нуклона.

3) Промежуточный векторный бозон $W^+(W^-)$ взаимодействует с партоном, обладающий долей импульса нуклона x и передает ему импульс q , а все остальные партоны просто наблюдают процесс.

В глубоконеупругом нейтрино-нуклонном рассеянии $\nu_\mu N \rightarrow \mu^- h^\pm X$ рождается отрицательно заряженный мюон. В результате заряд партона (кварка или антикварка) увеличивается на единицу. Следовательно, в четырехкварковой модели u, d, s, c нейтрино взаимодействует с d - и s -кварками или \bar{u} - или \bar{c} -антикварками:

$$\begin{aligned}
 \nu_\mu + d &\rightarrow \mu^- + u, & \nu_\mu + d &\rightarrow \mu^- + c, \\
 \nu_\mu + s &\rightarrow \mu^- + u, & \nu_\mu + s &\rightarrow \mu^- + c, \\
 \nu_\mu + \bar{u} &\rightarrow \mu^- + \bar{d}, & \nu_\mu + \bar{u} &\rightarrow \mu^- + \bar{s}, \\
 \nu_\mu + \bar{c} &\rightarrow \mu^- + \bar{d}, & \nu_\mu + \bar{c} &\rightarrow \mu^- + \bar{s}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

С учетом этих кварковых подпроцессов для структурных функций получены следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 F_1(x, z) &= \sum_q \sum_{q'} f_q^N(x) D_{q'}^h(z) |U_{q'q}|^2 + \sum_{\bar{q}'} \sum_{\bar{q}} f_{\bar{q}'}^N(x) D_{\bar{q}}^h(z) |U_{\bar{q}\bar{q}'}|^2, \\
 F_2(x, z) &= 2xF_1(x, z), \\
 F_3(x, z) &= 2 \left[\sum_q \sum_{q'} f_q^N(x) D_{q'}^h(z) |U_{q'q}|^2 - \sum_{\bar{q}'} \sum_{\bar{q}} f_{\bar{q}'}^N(x) D_{\bar{q}}^h(z) |U_{\bar{q}\bar{q}'}|^2 \right], \\
 g_1(x, z) &= 2 \left[\sum_q \sum_{q'} \Delta f_q^N(x) D_{q'}^h(z) |U_{q'q}|^2 + \sum_{\bar{q}'} \sum_{\bar{q}} \Delta f_{\bar{q}'}^N(x) D_{\bar{q}}^h(z) |U_{\bar{q}\bar{q}'}|^2 \right], \\
 g_5(x, z) &= - \sum_q \sum_{q'} \Delta f_q^N(x) D_{q'}^h(z) |U_{q'q}|^2 + \sum_{\bar{q}'} \sum_{\bar{q}} \Delta f_{\bar{q}'}^N(x) D_{\bar{q}}^h(z) |U_{\bar{q}\bar{q}'}|^2, \\
 g_2(x, z) &= 2xg_5(x, z).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $f_q^N(x)$ ($f_{\bar{q}}^N(x)$) – функция распределения кварка $q = d, s$ (антикварка $\bar{q}' = \bar{u}, \bar{c}$) в нуклоне, $D_{q'}^h(z)$ ($D_{\bar{q}}^h(z)$) – функция фрагментации кварка q' (антикварка \bar{q}) в адрон h , $\Delta f_q^N(x) = f_q^+(x) - f_q^-(x)$ ($\Delta f_{\bar{q}}^N(x) = f_{\bar{q}}^+(x) - f_{\bar{q}}^-(x)$), $f_q^+(x)$ ($f_{\bar{q}}^+(x)$) и $f_q^-(x)$ ($f_{\bar{q}}^-(x)$) – определяет распределение кварка q (антикварка \bar{q}') с положительной и отрицательной спиральностью в нуклоне с положительной спиральностью, $U_{qq'}$ – элементы матрицы смешивания кварков Кобаяши-Маскавы. В случае четырехкварковой модели u, d, s, c имеем:

$$U_{du} = U_{sc} = \cos \theta_C, \quad U_{su} = -U_{dc} = \sin \theta_C,$$

где θ_C – угол Кабиббо.

Как видно из выражений (16), структурные функции в кварк-партонной модели не зависят от квадрата передаваемого импульса Q^2 , это связано отсутствием взаимодействия между партонами. Однако, в квантовой хромодинамике благодаря кварк-глюонным взаимодействиям в функциях распределения и фрагментации кварков нарушается скейлинг [1, 4]:

$$f_q^N(x, Q^2), \quad D_q^N(z, Q^2).$$

Отметим, что из-за зарядовой симметрии сильных взаимодействий функции фрагментации π^\pm -мезонов удовлетворяют условиям:

$$D_u^{\pi^+}(z) = D_d^{\pi^-}(z) = D_{\bar{d}}^{\pi^+}(z) = D_{\bar{u}}^{\pi^-}(z).$$

Благодаря этим условиям, «разностная» двухспиновая асимметрия (14) зависит только от функций распределения кварков в нуклоне:

$$\begin{aligned} A_p^{\pi^+ - \pi^-}(\nu_\mu p \rightarrow \mu^- \pi X) &= \frac{\Delta d_\nu(x) + \Delta d_s(x)(1+R) - (1-y)^2 \Delta \bar{u}_s(x)}{d_\nu(x) + d_s(x)(1+R) + (1-y)^2 \bar{u}_s(x)}, \\ A_p^{\pi^+ - \pi^-}(\bar{\nu}_\mu p \rightarrow \mu^+ \pi X) &= -\frac{(1-y)^2 [\Delta u_\nu(x) + \Delta u_s(x)] + \Delta \bar{d}_s(x)(1+R)}{(1-y)^2 [u_\nu(x) + u_s(x)] + d_s(x)(1+R)}, \\ A_p^{\pi^+ - \pi^-}(\mu^- p \rightarrow \nu_\mu \pi X) &= \frac{\Delta u_\nu(x) + \Delta u_s(x) - (1-y)^2 \Delta \bar{d}_s(x)(1+R)}{u_\nu(x) + u_s(x) + (1-y)^2 \bar{d}_s(x)(1+R)}, \\ A_p^{\pi^+ - \pi^-}(\mu^+ p \rightarrow \bar{\nu}_\mu \pi X) &= -\frac{\Delta u_s(x)R - (1-y)^2 [\Delta d_\nu(x) + \Delta d_s(x)(1+R)]}{u_s(x)R + (1-y)^2 [d_\nu(x) + d_s(x)(1+R)]}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $u_\nu(x)$ и $d_\nu(x)$ ($u_s(x)$, $d_s(x)$) являются функциями распределения валентных (моревых) u - и d -кварков в протоне, $R = tg^2 \theta_C \approx 0.056$.

Аналогичные выражения для двухспиновых асимметрий $A_p^{K^+ - K^-}$ получены и в полуинклюзивных реакциях рождения K^\pm -мезонов.

Для оценки двухспиновых асимметрий (17) нами использованы функции распределения кварков в протоне, приведенные в [4, 12, 13].

На рис. 2 приведена зависимость двухспиновой асимметрии $A_p^{\pi^+ - \pi^-}$ от переменной x при фиксированном $y = 0.4$ в процессах $\nu_\mu p \rightarrow \mu^- \pi X$, $\bar{\nu}_\mu p \rightarrow \mu^+ \pi X$, $\mu^- p \rightarrow \nu_\mu \pi X$ и $\mu^+ p \rightarrow \bar{\nu}_\mu \pi X$ (кривые 1, 2, 3 и 4 соответственно). Как видно, в реакциях $\nu_\mu p \rightarrow \mu^- \pi X$ и $\mu^- p \rightarrow \nu_\mu \pi X$ двухспиновая асимметрия монотонно увеличивается, а в реакциях $\bar{\nu}_\mu p \rightarrow \mu^+ \pi X$ и $\mu^+ p \rightarrow \bar{\nu}_\mu \pi X$ наблюдается монотонное уменьшение асимметрий.

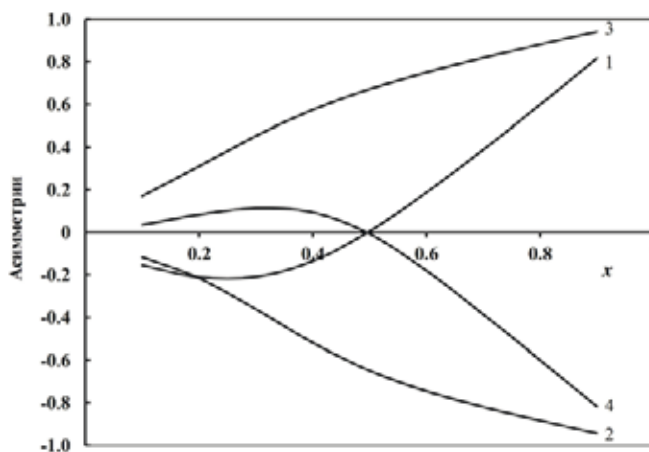


Рис. 2. Зависимость двухспиновой асимметрии $A_p^{\pi^+\pi^-}$ от переменной x при $y = 0.4$

Рис. 3 иллюстрирует зависимость двухспиновой асимметрии $A_p^{h^+h^-}$ от переменной y при фиксированной $x = 0.5$ в реакциях $\bar{\nu}_\mu p \rightarrow \mu^+ \pi X$ (кривая 1) и $\bar{\nu}_\mu p \rightarrow \mu^+ K X$ (кривая 2). Из рисунка следует, что в обеих реакциях двухспиновая асимметрия $A_p^{h^+h^-}$ отрицательна, монотонно увеличивается и в конце спектра приближается к нулю.

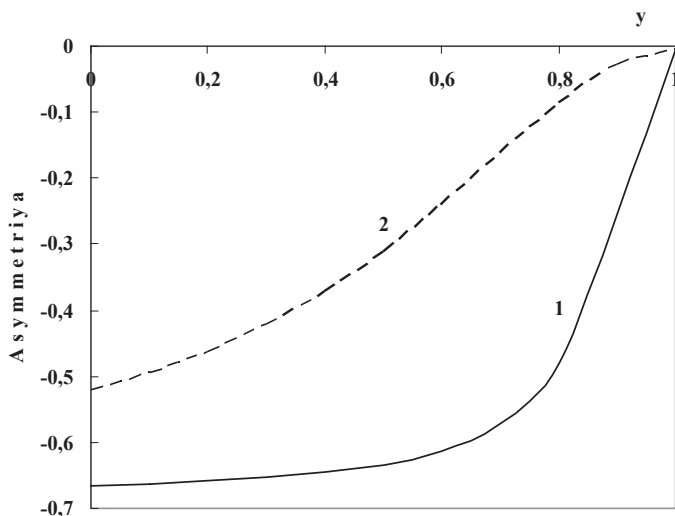


Рис. 3. Двухспиновая асимметрия $A_p^{h^+h^-}$ как функция y при $x = 0.5$.

На рис. 4 представлена зависимость двухспиновой асимметрии $A_p^{\pi^+\pi^-}$ ($\bar{\nu}_\mu p \rightarrow \mu^+ \pi X$) от переменной x при фиксированной $y = 0.1$ (кривая 1), $y = 0.4$ (кривая 2) и $y = 0.9$ (кривая 3). Как видно из рисунка, двухспино-

вая асимметрия $A_p^{\pi^+\pi^-}$ отрицательна и с увеличением переменной x монотонно уменьшается.

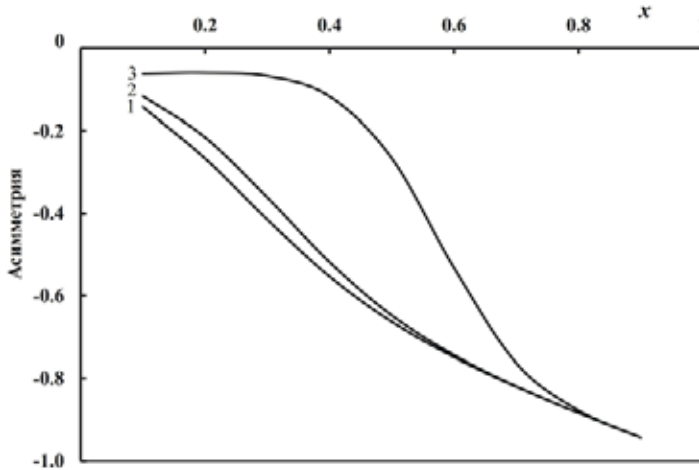


Рис. 4. Двухспиновая асимметрия $A_p^{\pi^+\pi^-} (\bar{\nu}_\mu p \rightarrow \mu^+ \pi X)$ как функция x

Заключение

Введением неполяризованных и поляризованных структурных функций получены дифференциальные сечения глубоконеупругих процессов $\nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) N \rightarrow \mu^- (\mu^+) h^\pm X$, $\mu^- (\mu^+) N \rightarrow \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) h^\pm X$. Определена двухспиновая асимметрия $A_N^{h^+h^-}$, в кварк-партонной модели вычислены неполяризованные и поляризованные структурные функции, исследована зависимость двухспиновой асимметрии в указанных реакциях от кинематических переменных x и y . Результаты иллюстрированы графиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beringer J. et al. (Particle Data Group Collaboration). 2012, Phys. Rev., D 86, 010001.
2. Абдуллаев С.К. Стандартная модель, свойства лептонов и кварков (на азерб. языке). Баку: Зека Принт, 2017, 276 с.
3. Mulders P.J. Polarized structure functions // Progress in Particle and Nuclear Physics, 2005, №55, p.243-269.
4. De Florian D., Navarro G.A., Sassot R. Sea quarks and gluon polarization in the nucleon at NLO accuracy // Phys. Rev., 2005, v. D 71, 094018, p. 1-12
5. Koike Y., Nagashima J. Double spin asymmetries for large- p_T hadron production in semi-inclusive DIS // arxiv: hep-ph/0302061, 2003, v.2, p.1-25.
6. Savin I.A. COMPASS results on the nucleon spin structure // Nuclear Physics B (Proceedings Supplements), 2011, 219-220, 94-101pp.
7. Nikolayev K. The polarized valence quark distribution from COMPASS // Spin-Praha-2007.
8. HERMES Collaboration. Quark helicity distributions in the nucleon for up, down, and strange quarks from semi-inclusive deep-inelastic scattering // Phys. Rev., 2005, D71, p. 012003.
9. COMPASS Collaboration (Alexakhin, V.Yu. et al.) The Deuteron Spin-dependent Struc-

- ture Function $g_1(d)$ and its First Moment // Phys. Lett., 2007, B 647, p. 8-17.
10. Abdullayev S.K. Double-spin asymmetries in semi-inclusive DIS // Azerbaijan Journal of Physics, Fizika, Baku, 2013, V. XIX, №3, p.19-24.
11. Abdullayev S.K., Mukhtarov A.I., Gojayev M.Sh. Double-spin asymmetries in semi-inclusive DIS // Azerbaijan Journal of Physics, Fizika, Baku, 2009, V. XV, №1, p.61-67.
12. De Florian D., Navarro G.A., Sassot R. Sea quarks and gluon polarization in the nucleon at NLO accuracy // Phys. Rev., 2005, D71, 094018, p. 1-12
13. De Florian D., Sassot R., Stratmann M. Global analysis of fragmentation functions for pions and kaons and their uncertainties // Phys. Rev. 2007, v. D 75, p. 114010

YARIİNKLÜZİV DƏRİN QEYRİ-ELASTİKİ SƏPİLMƏLƏRDƏ İKİSPİNLİ ASİMMETRİYALAR

M.Ş.QOCAYEV

XÜLASƏ

İşdə kvark-parton modeli çərçivəsində yarıinklüziv $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)N \rightarrow \mu^-(\mu^+)h^\pm X$, $\mu^-(\mu^+)N \rightarrow \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)h^\pm X$ proseslərinin polyarizə olunmamış və polyarizə olunmuş struktur funksiyaları üçün ifadələr alınmışdır. $A_N^{h^+-h^-}$ ikispinli «fərq» asimmetriyası təyin olunmuş və ətraflı tədqiq olunmuşdur.

Açar sözlər: yarıinklüziv reaksiyalar, kvark-parton modeli, ikispinli asimmetriya, struktur funksiyalar.

DOUBLE-SPIN ASYMMETRY IN SEMI-INCLUSIVE DEEP INELASTIC LEPTON-NUCLON SCATTERING

M.Sh.GOJAYEV

SUMMARY

Within the framework of the quark-parton model, expressions for nonpolarizing and polarizing structural functions in semi-inclusive $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)N \rightarrow \mu^-(\mu^+)h^\pm X$, $\mu^-(\mu^+)N \rightarrow \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)h^\pm X$ reactions are obtained. The "difference" two-spin asymmetry $A_N^{h^+-h^-}$ is determined and investigated in detail.

Key words: semi-inclusive reactions, quark-parton model, two-spin asymmetry, structural functions.

UDC 532.73

THE INFLUENCE OF THE MOLECULAR WEIGHT
OF POLYETHYLENE GLYCOL AND SOME LOW-MOLECULAR
ADDITIVES ON THE PHASE DIAGRAM OF THE WATER-POLYMER
TWO-PHASE SYSTEM PEG-SODIUM SALT OF CITRIC ACID

* E.A.MASIMOV, ** B.Y.ZASLAVSKY, * G.M.SHAHBAZOVA
* *Baku State University*, ** *Cleveland Diagnostics*
bsu.edu.gov.az

In this paper presents the results of studies of the phase diagram of a two-phase PEG-sodium salt of citric acid-water system the influence of the molecular weight of polyethylene glycol and some low-molecular additives (monohydric alcohols, polyhydric alcohols) on the characteristics of this diagram.

Keywords: *polyethylene glycol, sodium citrate, monohydric alcohols, polyhydric alcohols, two-phase systems*

Recently, an inexpensive and simple method for the distribution of substances in water-polymer two-phase systems, developed for the separation and purification of biological materials, is widely used in the medical and pharmacological industries, biotechnology [1-3]. These systems can be formed by mixing various components in water [4-6].

A method similar to the method of distribution chromatography liquids is based on the fact that a mixture of two different polymers or a polymer and an aqueous solution of electrolytes, above certain concentrations of components, is stratified into two phases.

When a mixture of, for example, proteins or cells is introduced into such a two-phase system, they are concentrated in one or another phase of the two-phase system.

The behavior of biological materials in a two-phase system depends on their individual characteristics and on the nature and concentration of phase-forming components, the nature of various additives.

This paper presents the results of studies of the phase diagram of a two-phase PEG-sodium salt of citric acid-water system and the effect of some additives of various nature on the characteristics of this diagram (binodal, connecting line, separation ability, critical point coordinate, etc.). PEGs of various mo-

lecular weights are widely used polymers in an aqueous two-phase system because of their low toxicity, low cost, and low volatility.

We used polyethylene glycol (manufactured by Panreac PEG-6000), sodium salt of citric acid (chemically pure), double-distilled water, various salts.

Figure 1 show the binodal of the two-phase system PEG-sodium salt of citric acid ($C_6H_5O_7Na_3$) on the axes the concentration of phase-forming components in weighted concentrations is plotted. As follows from Figure 1. The binodal system is asymmetric, which is associated with a large difference in the molecular weights of the components.

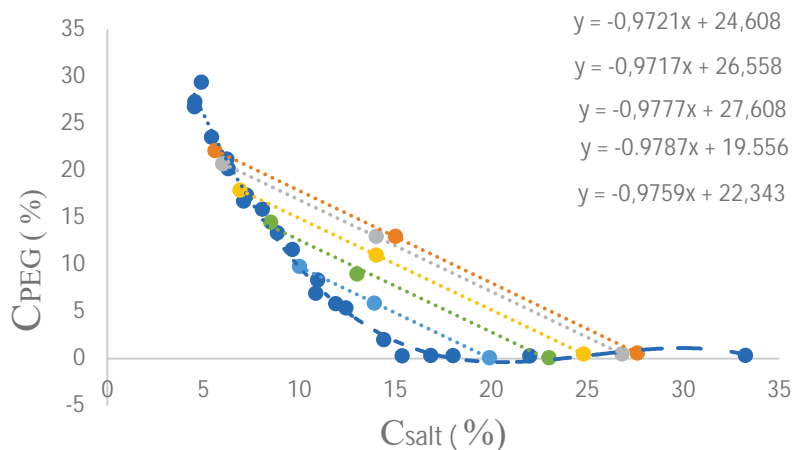


Fig. 1. Binodal curve of aqueous two phase systems PEG-sodium salt of citric acid

The angle of inclination of the connecting lines (BH) is practically constant and is equal to $\text{tg} = 0.97$

The equations of the connecting line are shown in Fig. The binodal curve was obtained by the well-known turbidity method (determination of phase compositions) based on data on phase compositions.

One of the factors affecting the phase diagram of a two-phase system is the molecular weight of the polymer. The obtained binodal curves for the three molecular masses of polyethylene glycol are presented in Fig. 2, and the values of the concentration at the critical point and the slope of the binodal curves for the various molecular masses used in the work are shown in Table 1.

As follows from Fig. 2, with an increase in the molecular weight of polyethylene glycol, the binodal curve separating the two regions of the phase diagram — the homogeneous and heterogeneous regions shifts in the direction of the origin. In this case, the area of the heterogeneous region of the diagram increases and phase separation occurs at lower concentrations of phase-forming components.

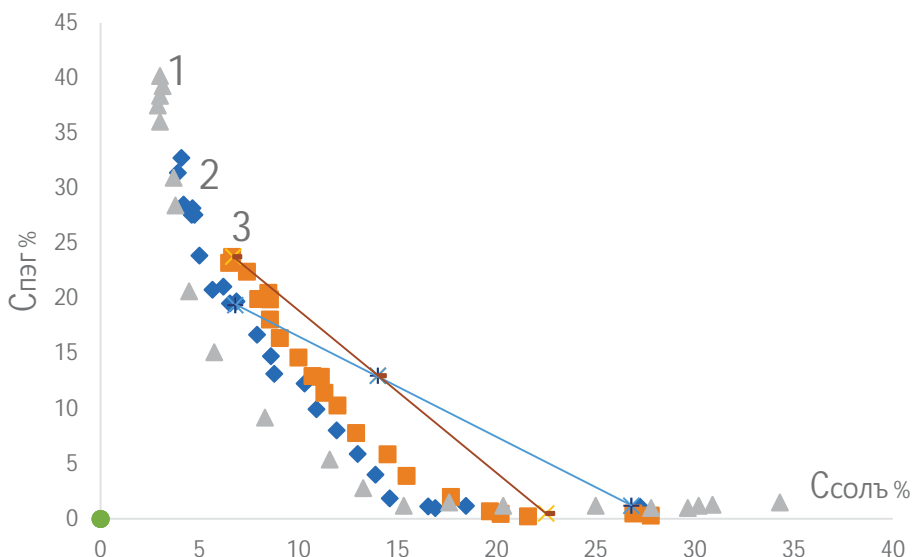


Fig.2. The effect of the molecular mass of the polymer on the phase diagram of the two-phase system of PEG-sodium salt of citric acid
 1. PEG -6000, 2. PEG -3000, 3. PEG -1500

Tab. 1

Critical point concentration and slope

	$C_{cr}PEG$ (weight%)	C_{cr} salt (weight%)	$tg\alpha$
PEG(1500)- $C_6H_5O_7Na_3-H_2O$	7.4	12.7	1.47
PEG (3000)- $C_6H_5O_7Na_3-H_2O$	1.87	14.6	0.91
PEG(6000)- $C_6H_5O_7Na_3-H_2O$	0.5	15.35	0.975

The obtained data is apparently due to the fact that with an increase in the molecular weight of the polymer, the amount of water molecules bound in the hydration shell increases, (the amount of free water decreases accordingly), the dissolution worsens, two different in structure water separate, forming two phases of a two-phase system and naturally phase separation occurs at lower concentrations, the greater the molecular weight of the polymer.

The work also examined the effects of some monohydric and polyhydric alcohols on the phase diagram of the studied two-phase system PEG-sodium salt of citric acid-water. The results are shown in Figures 3 and 4.

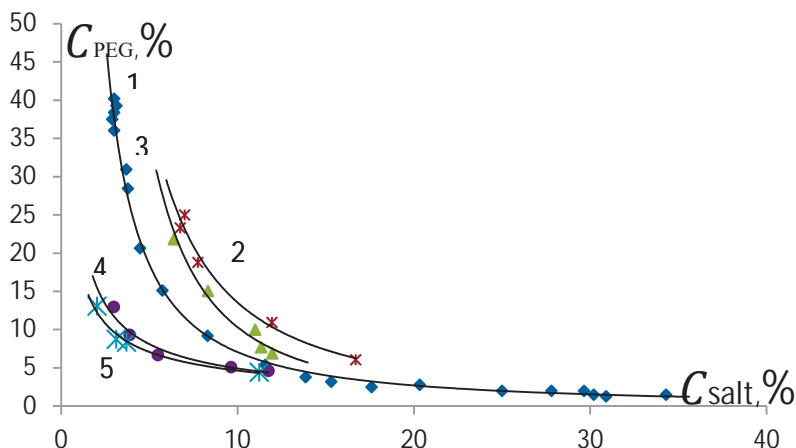


Fig. 3. The influence of some monohydric alcohols on the phase diagram of a two-phase PEG system - sodium salt of citric acid-water (1-basic binodal, 2-methanol, 3-ethanol, 4-propanol (0.3 mol / l), 5-propanol (0.5 mol / l).

As follows from Figure 3. methanol (CH_3OH), in the molecule of which one hydrophilic (OH) and one hydrophobic group (CH_3), the influence of the hydrophilic group that destroys the existing structure of the water, is superior to the influence of the structural water of the methyl group and the binodal is shifted in the direction from the coordinate origin. In this case, phase resettlement occurs at high concentrations of phase-forming components compared to the case when there are no additives.

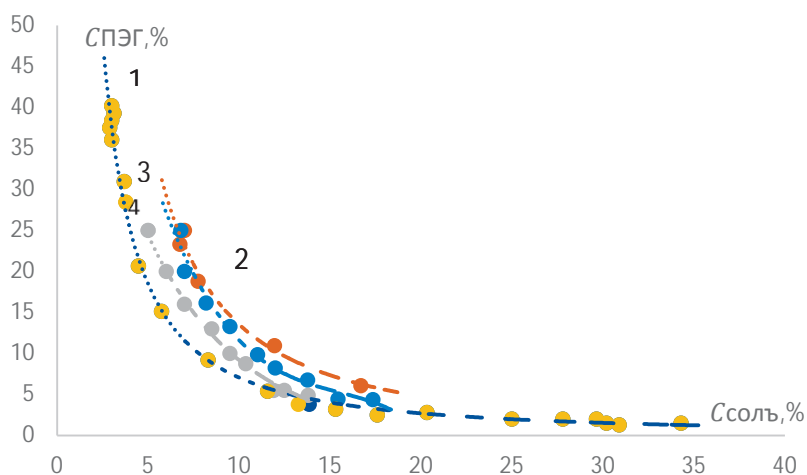


Fig. 4. The effect of some polyhydric alcohols on the phase diagram of a two-phase PEG-sodium citric acid-water salt system (1-basic binodal, 2-methanol, 3-ethylene glycol, 4-glycerin).

With an increase in the number of hydrophobic groups in the alcohol molecule (ethanol, propanol), the binodal curve shifts in the direction of the origin of coordinates at which the area of the heterogeneous region of the dia-

gram increases and separation occurs at lower concentrations of phase-forming components.

REFERENCES

1. Albertson P. Separation of cell particles and macromolecules. M.: Mir, 1974, 381 p.
2. Zaslavsky B.Y., Gulaeva N.D., Djafarov S.F., Masimov E.A., Larisa M. Miheeva/ Phase separation in aqueous poly(ethylene glycol)-(NH₄)₂SO₄ systems and some physicochemical properties of the phases. Journal of Colloid and Interface Science 137(1):147–156 · June, 1990 DOI: [10.1016/0021-9797\(90\)90051-O](https://doi.org/10.1016/0021-9797(90)90051-O)
3. Grilo AL, Raquel Aires-Barros M, Azevedo AM. Partitioning in aqueous two-phase systems: fundamentals, applications and trends. Sep Purif Rev. 2016; 45: 68–80. doi: 10.1080 / 15422119.2014.983128.
4. Van Berlo M, Luyben KCA, van der Wielen LA. Poly (ethylene glycol) -salt aqueous two-phase systems with easily recyclable volatile salts. J Chromatogr B. 1998; 711: 61–8.
5. Hatti-Kaul R. Aqueous Two-Phase Systems: Methods and Protocols. Berlin: Springer Science & Business Media; 2000.
6. Масимов Э., Аббасов Х., Багиров Т., Гасанова Х., Гурбанов Дж.Т. Структурные особенности двухфазной системы полиэтиленгликоль- С₄О₆Н₄Na₂-Н₂О//Журнал Физика Институт Физики НАН Азербайджана, 2007, том 13, № 1-2, с.334-336.

POLIETİLENQLİKOL(PEQ)-LİMON TURŞUSUNUN Na DUZU-SU İKİFAZALI SİSTEMİNİN HAL DİAQRAMINA PEQ-NİN MOLEKUL ÇƏKİSİNİN VƏ BƏZİ KİÇİKMOLEKULLU BİRLƏŞMƏLƏRİN TƏSİRİ

E.Ə.MƏSİMOV, B.Y.ZASLAVSKİY, G.M.ŞAHBAZOVA

XÜLASƏ

Təqdim olunan işdə PEQ-limon turşusunun Na duzu-su ikifazlı sisteminin hal diaqramı öyrənilmiş, bu diaqrama PEQ-nin molekul çəkisinin və bəzi kiçikmolekullu birləşmələrin təsirinə baxılmışdır.

Açar sözlər: polietilenqlikol, limon turşusunun Na duzu, biratomlu spirtlər, çoxatomlu spirtlər, ikifazlı sistemlər

ВЛИЯНИЕ МОЛЕКУЛЯРНОЙ МАССЫ ПЭГ И НЕКОТОРЫХ НИЗКОМОЛЕКУЛЯРНЫХ ДОБАВОК НА ФАЗАВУЮ ДИАГРАММУ ВОДНО-ПОЛИМЕРНОЙ ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ ПЭГ-НАТРИЕВАЯ СОЛЬ ЛИМОННОЙ КИСЛОТЫ

Э.А.МАСИМОВ, Б.Ю.ЗАСЛАВСКИЙ, Г.М.ШАХБАЗОВА

РЕЗЮМЕ

В данной работе представлены результаты исследований фазовой диаграммы двухфазной ПЭГ-натриевой соли системы лимонная кислота-вода и влияние молекулярной массы ПЭГ, некоторых добавок различной природы (одноатомных спиртов, многоатомных спиртов) на характеристики этой диаграммы.

Ключевые слова: полиэтиленгликоль, натриевая соль лимонной кислоты, одноатомные спирты, многоатомные спирты, двухфазные системы

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

Tağıyev R.Q., Məhərrəmli Ş.İ. Birölçülü parabolik tənlik üçün idarəetmə tipli bir əmsal tərs məsələ haqqında	5
Həmidov R.H. Relaksasiya yolu ilə böyük ölçülü xətti proqramlaşdırmanın bir məsələsinin həlli	13
Mirzəyev F.Ə., Hüseynova L.N. Azərbaycanın əmək bazarında işsizliyin ekonometrik tədqiqi.....	20
Əliyev N.A., Mürsəlova M.B. İkiölçülü Laplas tənliyi üçün düzbucaqda qeyri-lokal sərhəd məsələsi.....	32
Əzizbəyov E.İ. Uzuna yayılan dalğa tənliyi üçün zamana görə lokal tərs sərhəd məsələsi.....	39
Fəttayev H. Xətti koreperlərin laylanmasında Riman metrikasının diaqonal liftinin əyrilikləri.....	52
Qasimov E.A. Spektral məsələnin məxsusi və qoşma funksiyaları olan funksiyalar üzrə ayrılış düsturu haqqında.....	66
Əliyeva S.T. Bərabərsizlik tip funksional məhdudiyət olan bir sərhəd optimal idarəetmə məsələsində məxsusi halın tədqiqi	69
Şəfiyeva G. Güclü dissipasiyalı, birölçülü dalğa tənliyi üçün dinamik qoşmalıq şərti daxilində qarışıq məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi.....	85

MEXANİKA

Mehdiyev M.F., Fətullayeva L.F., Fomina N.İ., Qarayeva N.E. Düzbucaqlı tağa təsir edən böhran qüvvənin təyin olunması.....	93
--	----

İNFORMATİKA

Xəlilov M.S. İşlənilmənin son mərhələsində olan neft yataqlarının qalıq neft ehtiyatlarının çıxarılmasında polimer əsaslı nanosistemin tətbiqi imkanlarının qiymətləndirilməsi.....	99
---	----

Əliyeva F.P.

Kompüter şəbəkələri üçün təhlükəsizliyin təmin edilməsi sisteminin funksional strukturu 111

FİZİKA

KazıMZadə A.H., Salmanov V.M., Hüseynov Ə.H.,

Salmanova A.Ə., Məmmədov R.M., Əhmədova F.Ş.

GaSe kristallarında qeyri-xətti optik udma və sındırma əmsallarının lazer şüaları tədqiqi 121

Abdinov Ə.Ş., Babayeva R.F., Əmirova S.İ.,

Rəhimova N.Ə., Rəsulov E.A.

Laylı $A^{III}B^{VI}$ yarımkeçiricilərin elektrofiziki parametrlərinin xüsusiyyətləri və ağır lantanidlərlə aşqarlanmanın onlara təsiri 134

Məsimov E.Ə., Paşayev B.G., Rəcəbov M.R., Əliyev L.P.

Su-PEQ-KBr sistemlərində PEQ makromolekulunun konformasiyasının və ölçülərinin təyini 144

Həsənov E.R., Xəlilova Ş.Q., Mustafayeva R.K.

Zəif maqnit sahəsində ($\mu_{\pm}H_0 \ll c$) aşqar yarımkeçiricilərdə cərəyan rəqsləri 155

Qocayev M.Ş.

Yarıinklüziv dərin qeyri-elastiki səpilmələrdə ikispinli asimmetriyalar 163

Məsimov E.Ə., Zaslavskiy B.Y., Şahbazova G.M.

Polietilenqlikol(PEQ)-limon turşusunun Na duzu-su ikifazlı sisteminin hal diaqramına PEQ-nin molekul çəkisinin və bəzi kiçikmolekullu birləşmələrin təsiri 172

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Тагиев Р.К., Магеррамли Ш.И.
 Об одной коэффициентной обратной задаче типа управления для одномерного параболического уравнения..... 5

Гамидов Р.Г.
 Метод релаксации для одной большой задачи линейного программирования 13

Мирзоев Ф.А., Гусейнова Л.Н.
 Эконометрическое моделирование безработицы на рынке труда 20

Алиев Н.А., Мурсалова М.Б.
 Граничная задача для двумерного уравнения Лапласа с нелокальными граничными условиями на прямоугольнике 32

Азизбеков Э.И.
 Нелокальная по времени обратная коэффициентная задача для уравнения распространения продольной волны 39

Фаттаев Г.
 Кривизны диагонального лифта римановой метрики в расслоении линейных кореперов 52

Гасымов Э.А.
 О формуле разложения по собственным и присоединенным функциям спектральной задачи 66

Алиева С.Т.
 Исследование особого случая в одной граничной задаче оптимального управления при наличии функциональных ограничений типа неравенств..... 69

Шафиева Г.
 Существование и единственность решений смешанной задачи с динамическим условием сопряжения для одномерного волнового уравнения с сильной диссипацией 85

МЕХАНИКА

Мехтиев М.Ф., Фатуллаева Л.Ф., Фомина Н.И., Караева Н.Э.
 Определение критической силы, действующей на прямоугольную арку 93

ИНФОРМАТИКА

Халилов М.С.

Оценивания возможности применения полимерной наносистемы в добыче нефтепродуктов из нефтяных месторождений на последнем этапе разработки..... 99

Алиева Ф.П.

Функциональная структура системы обеспечения безопасности для компьютерных сетей..... 111

FIZIKA

Кязым-заде А.Г., Салманов В.М., Гусейнов А.Г.,

Салманова А.А., Мамедов Р.М., Ахмедова Ф.Ш.

Нелинейные коэффициент поглощения и показатель преломления в GaSe при лазерном возбуждении..... 121

Абдинов А.Ш., Бабаева Р.Ф., Амирова С.И.,

Рагимова Н.А., Расулов Э.А.

Особенности электрофизических параметров и влияние легирования тяжелыми лантанидами на них в слоистых полупроводниках $A^{III}B^{VI}$ 134

Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Раджабов М.Р., Алиев Л.П.

Определение конформации и размеров макромолекул ПЭГ в системах Вода-ПЭГ-KBr 144

Гасанов Э.Р., Халилова Ш.Г., Мустафаева Р.К.

Колебания тока в примесных полупроводниках при наличии слабого магнитного поля ($\mu_{\pm}H_0 \ll c$)..... 155

Годжаев М.Ш.

Двухспиновая асимметрия в полуинклюзивном глубоконеупругом лептон-нуклонном рассеянии..... 163

Масимов Э.А., Заславский Б.Ю., Шахбазова Г.М.

Влияние молекулярной массы ПЭГ и некоторых низкомолекулярных добавок на фазовую диаграмму водно-полимерной двухфазной системы ПЭГ-натриевая соль лимонной кислоты..... 172

CONTENTS

MATHEMATIC

Tagiev R.K., Maharramli Sh.I. On one coefficient inverse problem of a control type for a one-dimensional parabolic equation.....	5
Hamidov R.H. Relaxation method for one large linear programming	13
Mirzayev F.A., Huseynova L.N. Econometric investigation of unemployment in Azerbaijan's labor market.....	20
Aliyev N.A., Mursalova M.B. The boundary value problem for two-dimensional Laplace equation with the non-local boundary conditions on Rectangle.....	32
Azizbayov E.I. A time non-local inverse coefficient problem for the longitudinal wave propagation equation	39
Fattayev H. Curvatures of the diagonal lift of the riemannian metric in the bundle of linear coframes	52
Qasymov E.A. About of the expansion of an arbitrary functions and adjoint functions of the spectral problems	66
Aliyeva S.T. Research of a special case in one boundary problem of optimal management in the presence of functional limitations of type of inequalities	69
Shafiyeva G. Existence and uniqueness of solutions to the mixed problem with dynamical transmission condition for a one-dimensional wave equation with strong dissipation.....	85

MEXANİKA

Mekhtiyev M.F., Fatullayeva L.F., Fomina N.I., Karayeva N.E. Determination of the critical force on the rectangular arch	93
--	----

İNFORMATİKA

Khalilov M.S. Evaluation of possibility of application of polymer nano systems in production of oil products from oil fields in the last stage of development.....	99
--	----

Aliyeva F.P.

Functional structure of a security system for computer networks..... 111

FİZİKA

Kyazym-zade A.G., Salmanov V.M., Guseinov A.G.,

Salmanova A.A., Mamedov R.M., Ahmedova F.Sh.

Nonlinear absorption coefficient and refractive index
in GaSe under laser excitation..... 121

Abdinov A.Sh., Babayeva R.F., Amirova S.I.,

Rahimova N.A., Rasulov E.A.

Peculiarities of electrophysical parameters of layered $A^{III}B^{VI}$
semiconductors and effect of doping with heavy lanthanides..... 134

Masimov E.A., Pashayev B.G., Rajabov M.R., Aliyev L.P.

Determination of conformation and dimensions of
PEG macromolecule in the systems Water-PEG-KBr 144

Hasanov E.R., Khalilova Sh.G., Mustafayeva R.K.

Current oscillations in impurity semiconductors in the presence
of a weak magnetic field ($\mu_{\pm} H_0 \ll c$) 155

Gojayev M.Sh.

Double-spin asymmetry in semi-inclusive deep inelastic
lepton-nuclon scattering..... 163

Masimov E.A., Zaslavsky B.Y., Shahbazova G.M.

The influence of the molecular weight of polyethylene glycol
and some low-molecular additives on the phase diagram
of the water-polymer two-phase system peg-sodium salt of citric acid..... 172